

# Complementi di Analisi per Informatica

\*\*\*

## Capitolo 4 Trasformata di Fourier e Teorema del Campionamento

SERGIO BENENTI

Prima versione settembre 2017. Revisione gennaio 2020.



Harry Nyquist



Claude Elwood Shannon

# Indice

4.1	Definizioni . . . . .	1
4.2	Proprietà della TdF . . . . .	2
4.3	Le gaussiane . . . . .	6
4.4	Impulso rettangolare e seno cardinale . . . . .	8
4.5	Teorema del campionamento (Nyquist-Shannon) . . . . .	11

## 4.1 Definizioni

La trasformata di Fourier (TdF) opera su funzioni  $x(t)$  (che chiameremo correntemente **segnali**) definite su tutto l'asse reale e restituisce una funzione  $\hat{x}(\omega)$  di variabile reale  $\omega$  definita da

$$(4.1) \quad \hat{x}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Quando quest'integrale esiste ed è finito per ogni valore di  $\omega$  si dice che  $x(t)$  è **Fourier-trasformabile**. Si usa dire che con la TdF si passa dal **dominio del tempo**  $t$  al **dominio delle frequenze**  $\omega$ .<sup>1</sup>

La filosofia della TdF è questa: se un problema formulato nel dominio del tempo  $t$  si presenta difficilmente abbordabile, si può provare a tradurlo nel dominio della variabile  $\omega$  dove, si spera, esso sia risolvibile. Una volta risolto però, occorrerà ritornare al dominio del tempo, per esplicitarne la soluzione nel contesto originale.

Questo 'ritorno' comporta la definizione di una **antitrasformata di Fourier**, definita dalla seguente **formula di inversione**:<sup>2</sup>

$$(4.2) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La TdF trova applicazione in vari settori, tra i quali:

- Trattamento di equazioni differenziali.
- Trasmissione ed elaborazione di segnali.
- Trattamento di dati grafici.
- Elaborazione dati in apparecchiature di analisi scientifiche e medicali (TAC, RMN, spettrografia, ecc.).

Per la formula di Euler l'integrale (4.1) si spezza nella somma di due integrali,

$$(4.3) \quad \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

che prendono rispettivamente il nome di **trasformata coseno** e **trasformata seno**.

<sup>1</sup> In molti problemi dove la TdF trova applicazione la variabile  $\omega$  ha il significato di *pulsazione*, legato a quello di *frequenza*  $f$  dalla relazione

$$\omega = 2\pi f.$$

<sup>2</sup> Le costanti 1 e  $1/2\pi$  che compaiono davanti agli integrali delle definizioni (4.1) e (4.2) possono essere sostituite, in altri testi sulla TdF, da due altre costanti il cui prodotto è però sempre  $1/2\pi$ . La convenzione qui adottata è motivata dal fatto che, le definizioni (4.1) e (4.2) possono dedursi con un passaggio al limite della serie di Fourier complessa per l'intervallo  $[-L, L]$  che tende a  $(-\infty, +\infty)$ .

## 4.2 Proprietà della TdF

Per esprimere le proprietà fondamentali della TdF conviene adottare una simbologia alternativa a quella della definizione (4.1) sostituendo  $\hat{x}(\omega)$  con

$$(4.4) \quad \mathcal{F}[x(t)](\omega)$$

**1 Linearità.** La TdF di una combinazione lineare (a coefficienti costanti) di segnali è la combinazione lineare delle loro trasformate:

$$(4.5) \quad \mathcal{F}[\alpha x(t) + \beta y(t)](\omega) = \alpha \mathcal{F}[x(t)](\omega) + \beta \mathcal{F}[y(t)](\omega)$$

**2 Riscaldamento:**

$$(4.6) \quad \mathcal{F}[x(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left[x\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]$$

Il cambiamento di variabile  $t \mapsto at$ , cioè il riscaldamento del tempo  $t$ , comporta un riscaldamento  $\omega \mapsto \omega/a$  di  $\omega$  e poi una moltiplicazione per  $1/|a|$ .

**3 Traslazione o sfasamento nel tempo:**

$$(4.7) \quad \mathcal{F}[x(t - \tau)](\omega) = e^{-i\tau\omega} \mathcal{F}[x](\omega)$$

Il cambiamento di variabile  $t \mapsto t - \tau$ , cioè la traslazione del tempo  $t$ , comporta la moltiplicazione per  $e^{i\omega\tau}$  della trasformata  $\hat{x}(\omega)$ .

**4 Derivazione:**

$$(4.8) \quad \mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] = i\omega \mathcal{F}[x]$$

La TdF della derivata di un segnale si traduce nella moltiplicazione per  $i\omega$  della TdF del segnale stesso.<sup>3</sup> In simboli:

$$(4.9) \quad \frac{d}{dt} \leftrightarrow i\omega$$

<sup>3</sup> Dimostrazione. Per definizione,

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt.$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt &= \int e^{-i\omega t} dx(t) = e^{-i\omega t} x(t) - \int x(t) de^{-i\omega t} \\ &= e^{-i\omega t} x(t) + i\omega \int x(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Se in particolare prendiamo la TdF di  $y(t) = tx(t)$ ,

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) e^{-i\omega t} dt,$$

e deriviamo rispetto ad  $\omega$  la trasformata di  $x(t)$ , troviamo

$$\frac{d\mathcal{F}[x]}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) e^{-i\omega t} dt = -i \mathcal{F}[y] = \mathcal{F}[-itx].$$

Questo mostra che la derivata rispetto a  $\omega$  della TdF di  $x(t)$  è uguale alla TdF del prodotto di  $x(t)$  per  $-it$ . In simboli:

$$(4.10) \quad \boxed{\frac{d}{d\omega} \leftrightarrow -it}$$

**5 Integrazione.** Se  $X(t)$  è una primitiva di  $x(t)$ , cioè se

$$\frac{dX}{dt} = x(t),$$

allora per la (4.8)

$$\mathcal{F}\left[\frac{dX}{dt}\right](\omega) = i\omega \mathcal{F}[X]$$

e quindi

$$(4.11) \quad \boxed{\mathcal{F}[X](\omega) = -\frac{i}{\omega} \mathcal{F}[x](\omega)}$$

**6 Convolutione.** Dati due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  di cui si conoscono le TdF,  $\hat{x}(\omega)$  e  $\hat{y}(\omega)$ , si può calcolare la TdF del loro prodotto numerico  $x(t) \cdot y(t)$  con la formula

$$(4.12) \quad \boxed{\mathcal{F}[x \cdot y](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\tau) \hat{y}(\omega - \tau) d\tau}$$

che va così interpretata:

- (i) si prende la TdF  $\hat{x}(\omega)$  e si sostituisce la variabile  $\omega$  con la variabile  $\tau$  (è una banale sostituzione grafica, che però serve a evitare confusioni);
- (ii) si prende la TdF  $\hat{y}(\omega)$  e si sostituisce la variabile  $\omega$  con la variabile  $\omega - \tau$ ;
- (iii) si esegue l'integrale indicato dalla (4.12). Si trova una funzione nella variabile  $\omega$  che è proprio la TdF del prodotto  $x \cdot y$ .

---

Passando ai limiti di integrazione  $+\infty$  e  $-\infty$ , osserviamo che: (i) la funzione  $e^{-i\omega t} x(t)$  deve annullarsi, altrimenti il segnale  $x(t)$  non sarebbe Fourier-trasformabile; (ii) l'integrale coincide con la TdF di  $x(t)$ . Quindi  $\hat{x}(\omega) = i\omega \hat{x}(\omega)$ . ■

L'integrale nella (4.12) definisce un'operazione tra due trasformate  $\hat{x}(\omega)$  e  $\hat{y}(\omega)$  denotata con  $\hat{x}(\omega) * \hat{y}(\omega)$ ,

$$(4.13) \quad \boxed{\hat{x}(\omega) * \hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\tau) \hat{y}(\omega - \tau) d\tau}$$

chiamata **convoluzione**. Il simbolo  $*$  prende il nome di **prodotto convolutivo**.

Il prodotto convolutivo soddisfa alle tipiche regole dell'ordinario prodotto numerico:

$$(4.14) \quad \begin{array}{ll} x * y = y * x & \text{ propr. commutativa} \\ x * (ay + bz) = ax * y + bx * z & \text{ propr. distributiva} \\ x * (y * z) = (x * y) * z & \text{ propr. associativa} \end{array}$$

La (4.12) può risciversi

$$(4.15) \quad \boxed{\mathcal{F}[x \cdot y] = \mathcal{F}[x] * \mathcal{F}[y]}$$

oppure, con la notazione 'cappello',<sup>4</sup>

$$(4.16) \quad \boxed{\widehat{x \cdot y} = \hat{x} * \hat{y}}$$

Se invece consideriamo prima la convoluzione  $x * y$  dei due segnali e poi eseguiamo la TdF, otteniamo la formula

$$(4.17) \quad \boxed{\mathcal{F}[x * y](\omega) = \mathcal{F}[x](\omega) \cdot \mathcal{F}[y](\omega)}$$

ovvero

$$(4.18) \quad \boxed{\widehat{x * y} = \hat{x} \cdot \hat{y}}$$

\*\*\*

• Dimostrazione della (4.12). Eseguiamo l'antitrasformata del secondo membro dell'uguaglianza

$$(4.19) \quad \hat{x}(\omega) * \hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\tau) \hat{y}(\omega - \tau) d\tau$$

che definisce il prodotto convolutivo  $\hat{x}(\omega) * \hat{y}(\omega)$ .

$$\mathcal{F}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\tau) \hat{y}(\omega - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\tau) \hat{y}(\omega - \tau) d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega = \dots$$

<sup>4</sup> Dimostrazione a fine paragrafo.

Esplicitiamo la trasformata di  $\widehat{y}(\omega - \tau)$  utilizzando nuove variabili  $\omega'$  e  $t'$ :

$$\widehat{y}(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t') e^{-i\omega't'} dt', \quad \omega' = \omega - \tau.$$

Dunque:

$$\widehat{y}(\omega - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t') e^{-i(\omega - \tau)t'} dt'.$$

Segue:

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(t') e^{-i(\omega - \tau)t'} dt' \right) d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega = \dots$$

Spezzo l'esponenziale,  $e^{-i(\omega - \tau)t'} = e^{-i\omega t'} e^{i\tau t'}$ , e riordino gli integrandi:

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \widehat{x}(\tau) e^{i\tau t'} d\tau \right) \left( y(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega = \dots$$

Il primo integrando tra parentesi è l'antitrasformata di  $\widehat{x}(\tau)$ :

$$x(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau) e^{i\tau t'} d\tau.$$

Segue:

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') y(t') e^{-i\omega t'} dt' e^{i\omega t} d\omega = \dots$$

L'integrale in  $dt'$  è la trasformata di  $x(t') \cdot y(t')$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') y(t') e^{-i\omega t'} dt' = \widehat{x \cdot y}(\omega).$$

Segue:

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x \cdot y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \dots$$

Quest'ultimo integrale è l'antitrasformata di  $\widehat{x \cdot y}$ :

$$\dots = x(t) \cdot y(t).$$

Dunque, ritornando alla (4.19), abbiamo dimostrato che

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega) \right) = x(t) \cdot y(t),$$

quindi che

$$\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega) = \mathcal{F}[x(t) \cdot y(t)]. \quad \blacksquare$$

### 4.3 Le gaussiane

Una **gaussiana** è una funzione del tipo

$$(4.20) \quad G(t) = \beta e^{-\alpha t^2}$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  costanti reali positive. Osserviamo che  $G(0) = \beta$  e che

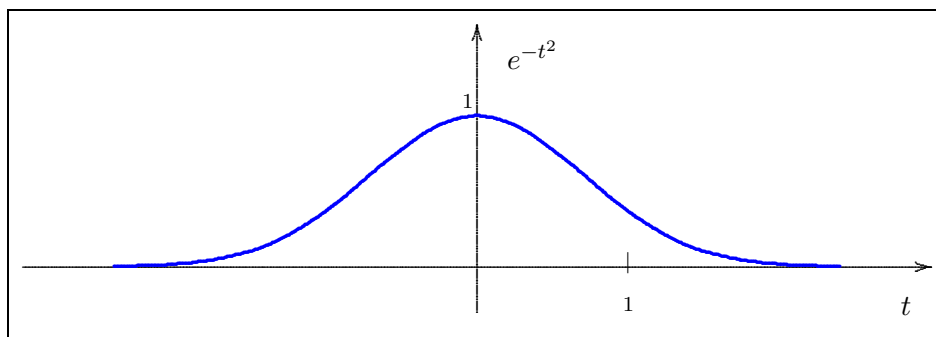
$$(4.21) \quad \frac{dG}{dt} = -2\beta\alpha t e^{-\alpha t^2} = -2\alpha t G.$$

Pertanto, la  $G(t)$  può essere definita come quell'*unica* funzione che risolve il seguente problema di Cauchy:

$$(4.22) \quad \boxed{\frac{dG}{dt} + 2\alpha t G = 0, \quad G(0) = \beta}$$

La più semplice delle gaussiane è evidentemente

$$G(t) = e^{-t^2}.$$



Per questa gaussiana vale la formula<sup>5</sup>

$$(4.23) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$$

Una delle tante proprietà rimarchevoli delle gaussiane è la seguente:

<sup>5</sup> Dimostrazione. Partiamo dall'integrale doppio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

D'altra parte, in coordinate polari,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-r^2} dr^2 = -\pi [e^{-r^2}]_0^{+\infty} = \pi. \quad \square \end{aligned}$$



**Teorema 4.3.1** – La TdF di una gaussiana è ancora una gaussiana,

$$(4.24) \quad G(t) = \beta e^{-\alpha t^2} \implies \widehat{G}(\omega) = \beta \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)$$

**Dimostrazione.** La TdF di  $G(t)$  è per definizione

$$(4.25) \quad \widehat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Eseguiamo la derivata *sotto il segno di integrale* rispetto a  $\omega$ :

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t G(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Ricorrendo all'equazione caratteristica (4.22) quest'ultima uguaglianza diventa

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} = \frac{i}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG}{dt} e^{-i\omega t} dt.$$

Ma l'integrale a secondo membro è la TdF della derivata  $dG/dt$  e, per la proprietà (4.8), possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG}{dt} e^{-i\omega t} dt = i\omega \widehat{G}(\omega)$$

per concludere che

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} = \frac{i}{2\alpha} i\omega \widehat{G}(\omega) = -\frac{1}{2\alpha} \omega \widehat{G}(\omega),$$

cioè che

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} + \frac{1}{2\alpha} \omega \widehat{G}(\omega) = 0.$$

Dunque la  $\widehat{G}(\omega)$  soddisfa all'equazione caratteristica delle gaussiane (4.22): è essa stessa una gaussiana

$$\widehat{G}(\omega) = \beta' e^{-\alpha' \omega^2}$$

con

$$\alpha' = \frac{1}{2\alpha}.$$

Il coefficiente  $\beta'$  è dato, tenuto conto della (4.25), da

$$\beta' = \widehat{G}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-\alpha t^2} dt = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} d(\sqrt{\alpha}t) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

posto  $u = \sqrt{\alpha}t$ . Quindi, per la (4.23),

$$\beta' = \beta \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad \square$$

Ci sono due gaussiane di speciale importanza:

1. La **distribuzione normale di Gauss**,

$$G(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

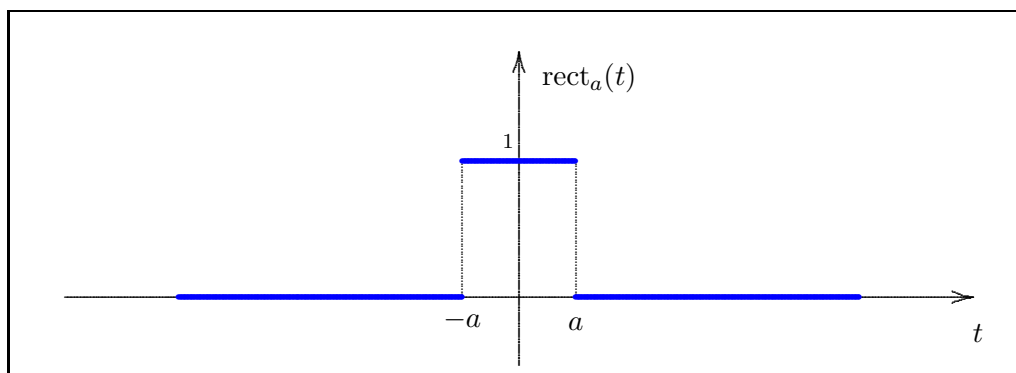
dove i parametri  $a$  e  $\sigma$  sono chiamati **media** e **deviazione standard**. Questa gaussiana è simmetrica rispetto a  $x = a$ .

2. La **distribuzione normale standard**, per cui  $a = 0$  e  $\sigma = 1$ ,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

#### 4.4 Impulso rettangolare e seno cardinale

Un **impulso (rettangolare, centrato)** è la funzione  $\text{rect}_a(t)$  rappresentata dal diagramma



Essa è definita da

$$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| > a, \\ 1 & \text{per } |t| \leq a. \end{cases}$$

La costante  $a$  è la semi-ampiezza dell'impulso. Calcoliamone la TdF. L'integrale 'improprio'

$$\mathcal{F}[\text{rect}_a](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_a(t) e^{-i\omega t} dt$$

si riduce all'integrale definito

$$(4.26) \quad \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt.$$

Calcoliamo il corrispondente integrale indefinito:

$$\int e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \int e^{-i\omega t} d(-i\omega t) = \frac{1}{-i\omega} \int e^u du = \frac{1}{-i\omega} e^u$$

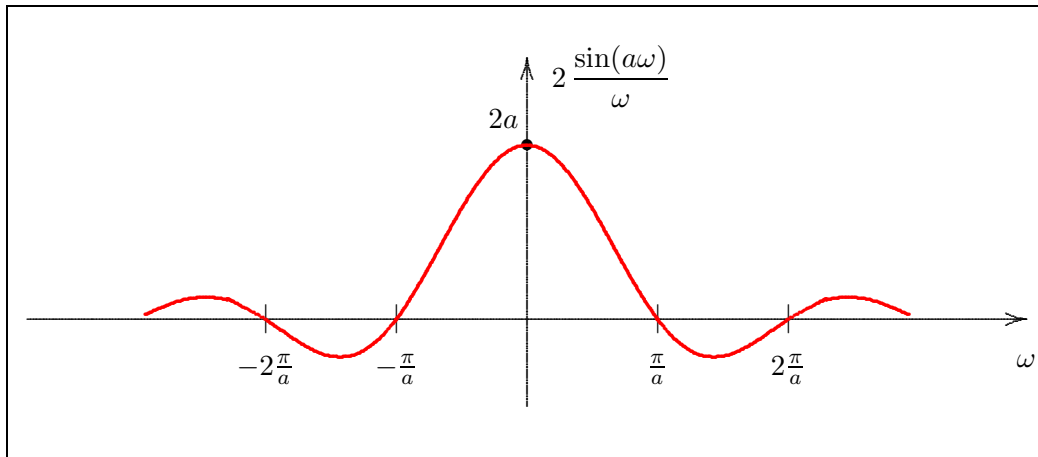
avendo posto  $u = -i\omega t$ . Dunque

$$\int e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} + \text{cost.}$$

Ritornando all'integrale definito (4.26) vediamo che

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{-i\omega} \left[ e^{-i\omega t} \right]_{-a}^a = \frac{1}{-i\omega} \left[ e^{-i\omega a} - e^{i\omega a} \right] \\ &= \frac{1}{-i\omega} \left[ \cos(-\omega a) + i \sin(-\omega a) - \cos(\omega a) - i \sin(\omega a) \right] \\ &= \frac{1}{-i\omega} \left[ \cos(\omega a) - i \sin(\omega a) - \cos(\omega a) - i \sin(\omega a) \right] \\ &= \frac{1}{-i\omega} \left[ -i \sin(\omega a) - i \sin(\omega a) \right] = 2 \frac{\sin(a\omega)}{\omega} = 2a \frac{\sin(a\omega)}{a\omega}. \end{aligned}$$

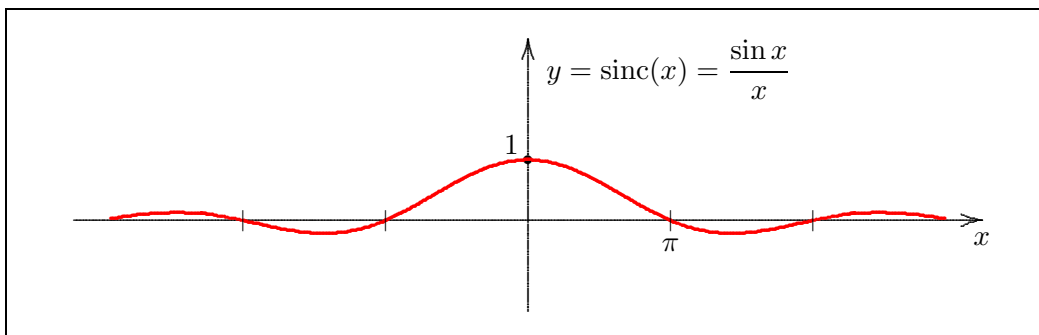
Questa è dunque la TdF di  $\text{rect}_a(t)$ . Il suo grafico:



Questo risultato mette in evidenza la funzione **seno cardinale di  $x$**

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

estesa per continuità a  $x = 0$ , dove assume valore 1, il cui grafico è



Con ciò abbiamo dimostrato che:

**Teorema 4.4.1** – La TdF della funzione impulso  $\text{rect}_a(t)$  è la funzione  $2a \text{sinc}(a\omega)$ :

$$(4.27) \quad \mathcal{F}[\text{rect}_a] = 2a \text{sinc}(a\omega)$$

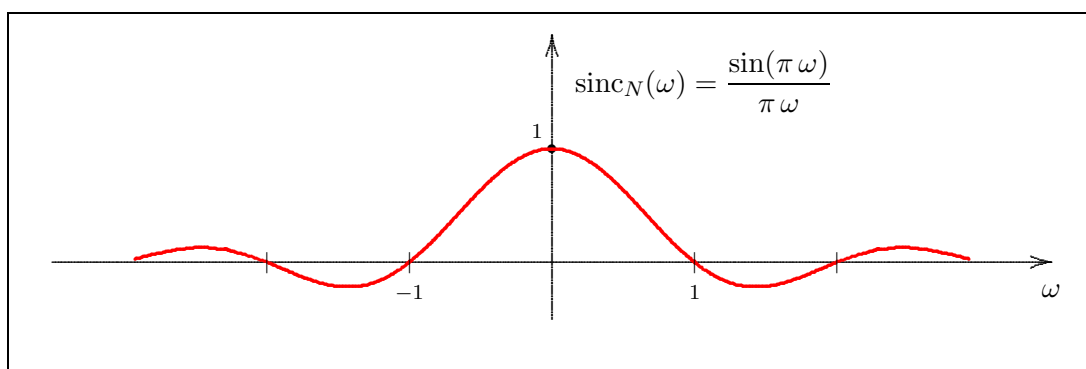
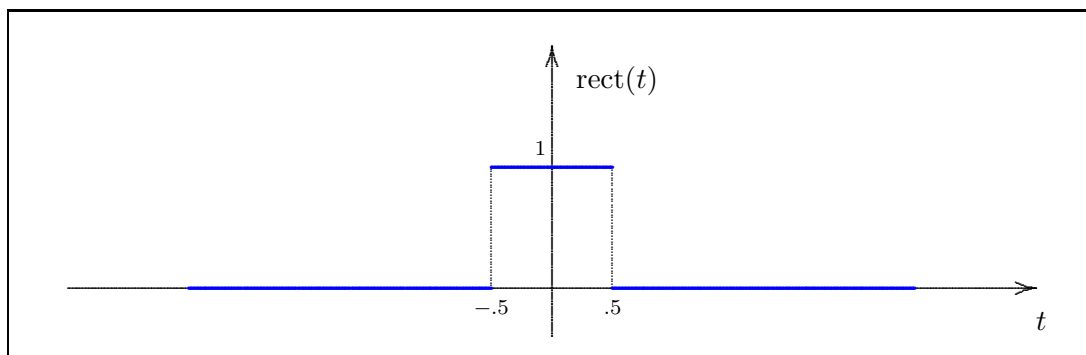
Insieme al seno cardinale si usa sovente il **seno cardinale normalizzato** definito da

$$\text{sinc}_N(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Si dimostra (in maniera analoga a quanto visto sopra) che:

**Teorema 4.4.2** – La funzione  $\text{sinc}_N(\omega)$  è la TdF dell'impulso quadrato unitario definito da

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| > \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{per } |t| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



## 4.5 Teorema del campionamento (Nyquist-Shannon)

Il **campionamento** di un **segnale analogico** <sup>6</sup>  $x(t)$ , definito in un intervallo di tempo  $t$  comunque esteso, consiste nella suddivisione di tale intervallo in tante **finestre** successive ed adiacenti. In ognuna di tali finestre, si preleva poi il valore del segnale ad intervalli regolari di ampiezza  $\tau$ .

Nella Fig. 1 viene mostrata una **finestra** che copre il segnale  $x(t)$  in un intervallo temporale  $[a, b]$ . Per ‘snellire’ alcune formule che troveremo nel seguito, e senza venir meno alla generalità, possiamo considerare un intervallo simmetrico  $[a, b] = [-n_*\tau, n_*\tau]$ , dove  $\tau$  è l'**intervallo di campionamento** ed  $n_*$  un numero intero positivo. Fuori dalla finestra il segnale è da ritenersi nullo.

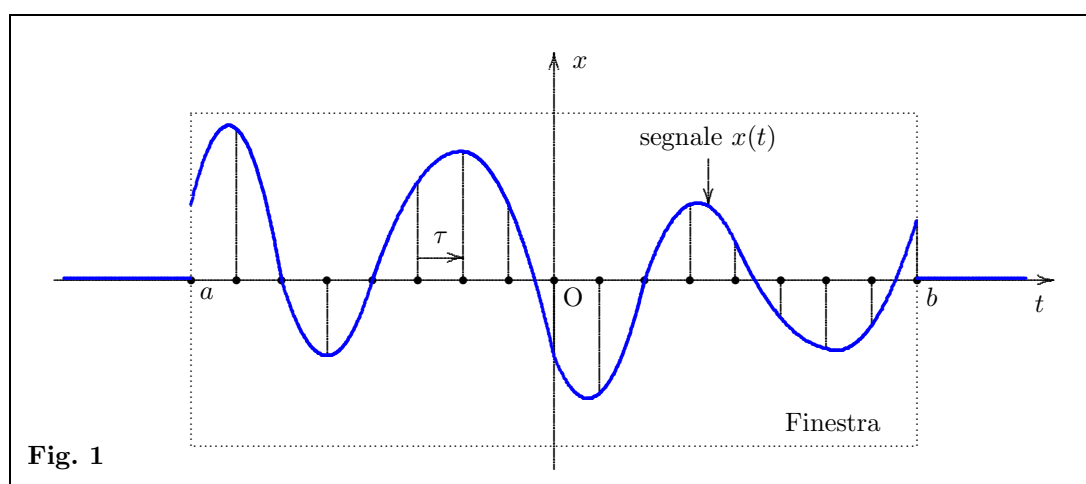


Fig. 1

Si ottiene un **segnale campionato** o **digitalizzato** costituito da soli impulsi, ovvero da una *sequenza di numeri*, Fig. 2:

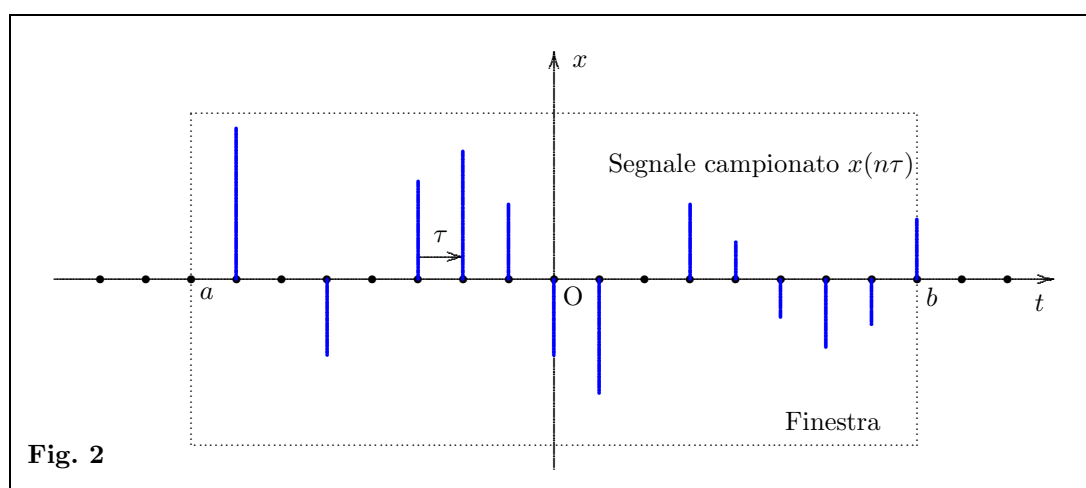


Fig. 2

<sup>6</sup> Cioè di una funzione continua.

Si osservi che, pur essendo interessati soltanto a ciò che avviene all'interno della finestra, sull'asse  $t$  della Fig. 2 abbiamo indicato anche alcuni campionamenti all'esterno, di valore zero. Ciò renderà più comprensibili alcuni ragionamenti che faremo in seguito.

Il campionamento è l'operazione di base nel passaggio AD, analogico/digitale, di un segnale  $x(t)$ . Il segnale viene elaborato in finestre adiacenti successive, di ampiezza opportuna. Per una data finestra il segnale campionato o **digitalizzato**, essendo una sequenza di numeri, può essere trasmesso (o elaborato) più facilmente e senza errori, anche in contemporanea con altri segnali. Il segnale digitalizzato dovrà poi essere riconvertito dal ricevente in un segnale analogico: passaggio DA. C'è da presumere che in questo doppio passaggio, AD/DA, si abbia una qualche *perdita di fedeltà*. Sussiste tuttavia un teorema – il teorema del campionamento, appunto<sup>7</sup> – che sotto certe condizioni consente la *ricostruzione sufficientemente fedele* del segnale analogico a partire da quello digitalizzato. Questo passaggio DA è basato sulla seguente definizione e sul successivo teorema.

**Definizione 4.5.1** – Un segnale  $x(t)$  si dice **a banda limitata** se è Fourier-trasformabile e se esiste un numero positivo  $\omega_B$ , detto **limite di banda**, tale che

$$(4.28) \quad \hat{x}(\omega) = 0 \quad \text{per } |\omega| > \omega_B.$$

**Teorema 4.5.1** – Sia  $x(t)$  un segnale campionato nella finestra  $[-\infty, +\infty]$ ,<sup>8</sup> a banda limitata con limite di banda  $\omega_B$ . Se il campionamento è fatto con intervallo di campionamento<sup>9</sup>

$$(4.29) \quad \tau = \frac{\pi}{\omega_B}$$

allora il segnale è fedelmente ricostruibile dalla sequenza dei suoi campioni  $x(n\tau)$  con la **formula di ricostruzione**

$$(4.30) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\tau) \operatorname{sinc}_N \left( \frac{t}{\tau} - n \right)$$

dove  $\operatorname{sinc}_N$  è la funzione seno cardinale normalizzato.

**Osservazione 4.5.1** – Questa formula di ricostruzione è espressa da una serie nella quale i valori  $x(n\tau)$  sono i valori digitalizzati del segnale. Se però ci riferiamo ad una finestra, i valori digitalizzati al di fuori di questa sono tutti nulli, come si è detto a proposito della Fig. 2; quindi la serie si riduce ad una somma finita. •

<sup>7</sup> *Sampling theorem.*

<sup>8</sup> È chiaro che il risultato del teorema che stiamo enunciando dovrà poi, per la sua concreta applicazione, essere adattato ad una finestra di ampiezza finita.

<sup>9</sup> O anche inferiore a questo. Lo si vede modificando leggermente la dimostrazione.

**Dimostrazione.** Si parte dalla TdF del segnale  $x(t)$

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

La dimostrazione si basa sulla rappresentazione mediante la serie di Fourier complessa della funzione  $\hat{x}(\omega)$  nell'intervallo  $[-\omega_B, \omega_B]$ , al di fuori del quale, per l'ipotesi di banda limitata,  $\hat{x}(\omega) = 0$ :<sup>10</sup>

$$(4.31) \quad \hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp \frac{in\pi\omega}{\omega_B},$$

con i coefficienti definiti da

$$(4.32) \quad c_n = \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \hat{x}(\omega) \exp \frac{-in\pi\omega}{\omega_B} d\omega.$$

Siccome vale la (4.29) possiamo scrivere

$$(4.33) \quad \hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\tau\omega},$$

$$(4.34) \quad c_n = \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \hat{x}(\omega) e^{-in\tau\omega} d\omega.$$

La dimostrazione consiste in due passaggi successivi. Il primo passaggio 1 consiste nel dimostrare che i coefficienti  $c_n$  sono esprimibili mediante i valori campionati del segnale  $x(t)$  con la formula

$$(4.35) \quad \boxed{c_n = \tau x(-n\tau)}$$

Utilizzando questa formula la trasformata (4.33) assume la forma

$$(4.36) \quad \hat{x}(\omega) = \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) e^{in\tau\omega}.$$

Il secondo passaggio 2 consiste nell'antitrasformare la funzione  $\hat{x}(\omega)$  data da (4.36), per ottenere  $x(t)$ :

$$(4.37) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

<sup>10</sup> Applichiamo le formule del primo teorema del §2 del capitolo sulle serie di Fourier, dove ora è  $L = \omega_B$  e  $t = \omega$ .

Cominciamo col dimostrare questo secondo passaggio [2]. Per la condizione di banda limitata (4.28) l'integrale (4.37) si può limitare all'intervallo finito  $[-\omega_B, \omega_B]$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) e^{in\tau\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) e^{in\tau\omega} e^{i\omega t} d\omega = \dots \end{aligned}$$

Permutando la sommatoria con l'integrale:

$$\dots = \frac{\tau}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{in\tau\omega} e^{i\omega t} d\omega = \dots$$

Accorpo gli esponenziali:

$$(4.38) \quad \dots = \frac{\tau}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{i(n\tau+t)\omega} d\omega = \dots$$

Valuto l'integrale indefinito e uso la formula di Euler:

$$\begin{aligned} \int e^{i(n\tau+t)\omega} d\omega &= \frac{1}{i(n\tau+t)} \int e^{i(n\tau+t)\omega} d[i(n\tau+t)\omega] = \frac{e^{i(n\tau+t)\omega}}{i(n\tau+t)} + c \\ &= \frac{1}{i(n\tau+t)} \left[ \cos[(n\tau+t)\omega] + i \sin[(n\tau+t)\omega] \right] + c. \end{aligned}$$

Segue, tenendo conto che il coseno è una funzione dispari e il seno è pari:

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{i(n\tau+t)\omega} d\omega &= \frac{1}{i(n\tau+t)} \left[ \cos[(n\tau+t)\omega] + i \sin[(n\tau+t)\omega] \right]_{-\omega_B}^{\omega_B} \\ &= \frac{1}{i(n\tau+t)} \left[ 2i \sin[(n\tau+t)\omega_B] \right] \\ &= 2 \frac{\sin[(n\tau+t)\omega_B]}{n\tau+t}. \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nella (4.38) troviamo che

$$x(t) = \frac{\tau}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \frac{\sin[(n\tau+t)\omega_B]}{n\tau+t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \frac{\sin[(n\tau+t)\omega_B]}{\frac{\pi}{\tau}(n\tau+t)}$$

Qui entra in gioco l'ipotesi (4.29), per cui

$$\omega_B = \frac{\pi}{\tau}, \quad (n\tau+t)\omega_B = \pi \left( n + \frac{t}{\tau} \right).$$



$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \frac{\sin \left[ \pi \left( n + \frac{t}{\tau} \right) \right]}{\pi \left( n + \frac{t}{\tau} \right)}.$$

Basta infine cambiare  $n$  in  $-n$ , cosa che è lecita perché la sommatoria su  $n$  va da  $-\infty$  a  $+\infty$ , per ottenere la formula di ricostruzione (4.30).

Ritorniamo ora al passaggio 1, dimostrazione della (4.35) a partire dalla (4.32):

$$c_n = \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \hat{x}(\omega) \exp \frac{-in\pi\omega}{\omega_B} d\omega.$$

Facendo intervenire ancora una volta l'ipotesi di limitazione di banda di  $x(t)$ , per cui  $\hat{x}(\omega)$  si annulla fuori dell'intervallo di integrazione  $[-\omega_B, \omega_B]$ , in questa formula l'integrazione si può estendere all'infinito:

$$(4.39) \quad c_n = \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{-in\tau\omega} d\omega.$$

Richiamiamo la definizione di antitrasformata,

$$(4.40) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

e poniamo  $t = -n\tau$ . Troviamo:

$$x(-n\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{-in\tau\omega} d\omega.$$

Ma dall'uguaglianza (4.29) si trae  $\pi = \tau\omega_B$ , e quindi

$$x(-n\tau) = \frac{1}{2\tau\omega_B} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{-in\tau\omega} d\omega,$$

Dal confronto di questo risultato con la (4.39) segue appunto la (4.35). ■