

Complementi di Analisi  
per Informatica

\*\*\*

Capitolo 3

Serie di Fourier  
e  
Analisi Armonica

SERGIO BENENTI

Prima versione settembre 2017. Revisione gennaio 2020.



Jean Baptiste Joseph Fourier  
(Auxerre, 1768 – Parigi, 1830)

# Indice

3.1	Definizioni e proprietà fondamentali . . . . .	1
3.2	Rappresentazione complessa . . . . .	3
3.3	Rappresentazione ampiezze-fasi . . . . .	5
3.4	Uguaglianza di Parseval . . . . .	6
3.5	Analisi armonica . . . . .	7

### 3.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Sia  $x(t)$  un **segnale**<sup>1</sup> definito (almeno) in un intervallo  $[-L, L] \subseteq \mathbb{R}$ , simmetrico di raggio  $L$ .

Supponiamo che in questo intervallo il segnale soddisfi alle **condizioni di Dirichlet**: *si può dividere l'intervallo in un numero finito di sottointervalli dove  $x(t)$  è continuo ed i limiti di  $x(t)$  per  $t$  che tende agli estremi di tali intervalli sono finiti.*<sup>2</sup>

Sotto quest'ipotesi sussiste un primo teorema fondamentale:

**Teorema 3.1.1** – *Valendo le condizioni di Dirichlet per il segnale  $x(t)$ , risultano ben definite le successioni numeriche*

$$(3.1) \quad \begin{cases} a_0 \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x(t) dt, \\ a_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, & n = 1, 2, \dots, \\ b_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, & n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Si noti che  $b_0 = 0$  e che  $a_0$  è il valor medio del segnale  $x(t)$  nell'intervallo considerato.

Con queste successioni si costruisce la serie di funzioni circolari

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Fx(t) &\doteq \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \\ &= a_0 + \left( \cos \frac{\pi t}{L} + b_1 \sin \frac{\pi t}{L} \right) + \left( \cos \frac{2\pi t}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi t}{L} \right) + \dots \end{aligned}$$

detta **serie di Fourier** di  $x(t)$ . In numeri  $a_n$  e  $b_n$  prendono il nome di **coefficienti di Fourier** della serie. Si pongono allora due questioni:

1. Sotto quali condizioni questa serie converge?
2. Se converge, a quale funzione converge?

La risposta è data da questo secondo teorema fondamentale:

**Teorema 3.1.2** – *Valgano le condizioni di Dirichlet per il segnale  $x(t)$ . Se  $t$  è un punto di continuità di  $x(t)$ , allora la serie di Fourier  $Fx(t)$  converge a  $x(t)$ , vale cioè l'uguaglianza*

$$(3.3) \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right).$$

<sup>1</sup> Per 'segnale' intenderemo una funzione ad una variabile reale  $t$ , intesa come 'tempo'.

<sup>2</sup> Una tale funzione si dice anche *generalmente continua*. Si può dire che una funzione è generalmente continua se ammette al più un numero finito di discontinuità finite. Occorre anche richiedere che sia derivabile bilateralmente nei punti di discontinuità.

Se invece  $t$  è un punto di discontinuità, allora la serie di Fourier ha per somma la media aritmetica dei due limiti, destro e sinistro, di  $x(t)$ .<sup>3</sup>

$$(3.4) \quad Fx(t) = \frac{x(t+0) + x(t-0)}{2}.$$

Questo teorema è di enorme interesse per le applicazioni. Esso afferma che un qualunque segnale generalmente continuo (soddisfacente cioè alle peraltro non troppo restrittive condizioni di Dirichlet) si può **discretizzare**, cioè rappresentare attraverso due successioni numeriche,  $a_n$  e  $b_n$ . Se poi, per un dato segnale, queste due successioni tendono ‘rapidamente’ a zero al crescere di  $n$ , allora ci si può arrestare ad un certo intero  $n_0$ . Ciò ha due conseguenze notevoli:

1. Il segnale può essere rappresentato, con un buon grado di approssimazione, da  $2n_0 - 1$  numeri:

$$a_0, a_1, \dots, a_{n_0}, \quad b_1, b_2, \dots, b_{n_0}.$$

2. Noti questi numeri, il segnale può essere ricostruito, abbastanza fedelmente, con la somma finita

$$(3.5) \quad x(t) \simeq \sum_{n=0}^{n_0} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right),$$

di seni e coseni.

L’uguaglianza di Parseval, più avanti, ci fornirà qualche informazione a proposito di questa approssimazione.

**Osservazione 3.1.1** – Quanto ora visto si riconduce al caso di un generico intervallo  $[a, b]$ : basta eseguire il cambiamento lineare di variabile

$$(3.6) \quad t' = \frac{(2t - b - a)L}{b - a}.$$

Infatti, nella nuova variabile  $t'$  l’intervallo di lavoro diventa  $[-L, L]$  (prova: per  $t = a$  si ha  $t' = -L$ , per  $t = b$  si ha  $t' = L$ ). •

**Osservazione 3.1.2** – Sovente si usa operare nell’intervallo  $[-\pi, \pi]$ , vale a dire con  $L = \pi$ . Allora le (3.1) diventano

$$(3.7) \quad \begin{cases} a_0 \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt, \\ a_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt, & n = 1, 2, \dots, \\ b_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt) dt, & n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad \bullet$$

<sup>3</sup> In questa formula  $x(t+0)$  denota il limite di  $x(t+h)$  per  $h$  che tende a zero per valori positivi, ...

**Osservazione 3.1.3** – Si può dimostrare che, se la funzione  $x(t)$  è continua, la serie di Fourier troncata ad un  $n$  sufficientemente grande rappresenta abbastanza fedelmente  $x(t)$ . Naturalmente questa affermazione generica può essere resa rigorosa con teoremi opportuni. Se la funzione  $x(t)$  non è continua si presenta il **fenomeno di Gibbs**, che consiste nella permanenza di “piccole oscillazioni, più accentuate nell’intorno delle discontinuità, per quanto grande sia  $n$  (caso dell’onda quadra e dell’onda a dente di sega, vedi Fig. 1). •

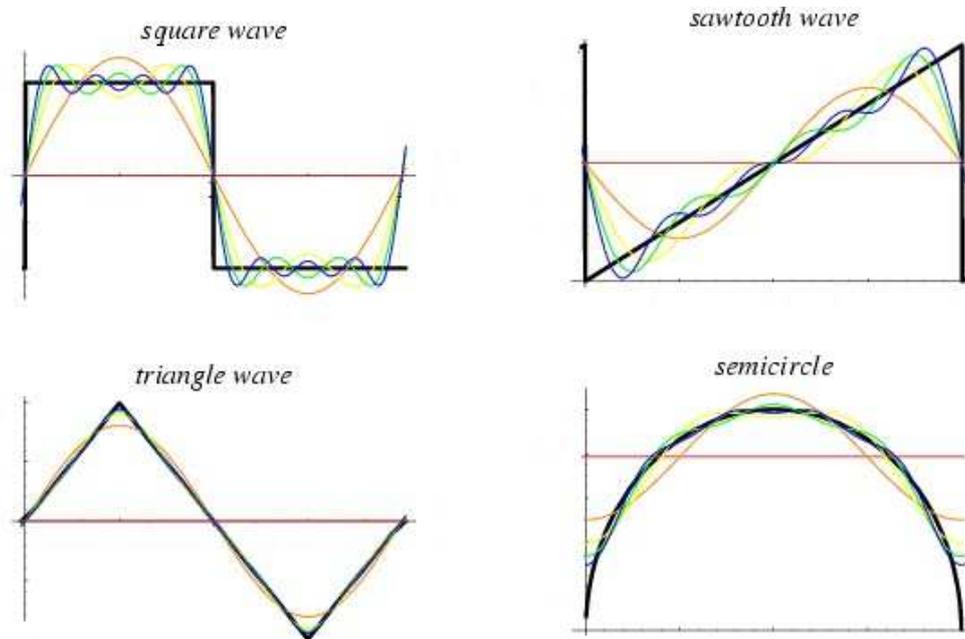


Fig. 1

### 3.2 Rappresentazione complessa

**Teorema 3.2.1** – La serie di Fourier (3.2),

$$Fx(t) \doteq \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right),$$

ammette una **rappresentazione complessa**

$$(3.8) \quad Fx(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp \frac{in\pi t}{L}$$

i cui coefficienti complessi  $c_n$  sono legati ai coefficienti reali  $a_n$  e  $b_n$  dalle relazioni

$$(3.9) \quad c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e sono quindi dati da

$$(3.10) \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x(t) \exp \frac{-in\pi t}{L} dt.$$

**Osservazione 3.2.1** – Questo enunciato, prima ancora della sua dimostrazione, impone alcune osservazioni. Innanzitutto, la somma della serie (3.8) va da  $-\infty$  a  $+\infty$ , mentre quella originale (3.2) va da 0 a  $+\infty$ . Seconda osservazione: nei termini della serie (3.8), sia i coefficienti  $c_n$  sia gli esponenziali, sono numeri complessi. Allora, può questa serie ‘complessa’ essere equivalente ad una serie ‘reale’? Verifichiamolo subito considerando una qualunque coppia di termini *simmetrici rispetto ad n* nella serie (3.8), vale a dire:

$$c_n \exp(i\alpha_n) \quad \text{e} \quad c_{-n} \exp(-i\alpha_n),$$

posto

$$\alpha_n = \frac{n\pi t}{L}.$$

Sommiamo questi due termini corrispondenti. Per la formula di Euler abbiamo successivamente:

$$\begin{aligned} c_n \exp(i\alpha_n) + c_{-n} \exp(-i\alpha_n) &= c_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n) + c_{-n} (\cos \alpha_n - i \sin \alpha_n) \\ &= \cos \alpha_n (c_n + c_{-n}) + i \sin \alpha_n (c_n - c_{-n}) = \dots \end{aligned}$$

Ma per le (3.9),

$$c_n + c_{-n} = a_n, \quad c_n - c_{-n} = -i b_n.$$

Quindi

$$\dots = a_n \cos \alpha_n + i (-i b_n) \sin \alpha_n = a_n \cos \alpha_n + b_n \sin \alpha_n,$$

e questo è un numero reale. •

**Dimostrazione.** Osservo che, grazie alla formula di Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , e posto (per semplificare le formule che seguono)

$$c_n = \alpha_n + i \beta_n, \quad \frac{\pi t}{L} = \xi,$$

la (3.8) si sviluppa in

$$\begin{aligned} Fx(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (\cos n\xi + i \sin n\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + i \beta_n) (\cos n\xi + i \sin n\xi) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + i \beta_n) \cos n\xi + \sum_{-\infty}^{+\infty} (i\alpha_n - \beta_n) \sin n\xi \\ &= \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n) \cos n\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_{-n} + i\beta_{-n}) \cos n\xi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} (i\alpha_n - \beta_n) \sin n\xi - \sum_{n=1}^{+\infty} (i\alpha_{-n} - \beta_{-n}) \sin n\xi = \dots \end{aligned}$$

Se pongo

$$(3.11) \quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0, \\ \alpha_n = \alpha_{-n} = \frac{a_n}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0 = 0, \\ \beta_n = -\frac{b_n}{2}, \\ \beta_{-n} = \frac{b_n}{2}, \end{cases}$$

ottengo

$$\begin{aligned} Fx(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - ib_n) \cos n\xi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) \cos n\xi \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (ia_n + b_n) \sin n\xi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (ia_n - b_n) \sin n\xi \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\xi. \end{aligned}$$

Questo risultato coincide con la (3.2),

$$Fx(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi).$$

Per dimostrare la validità della (3.8) basta osservare che le posizioni (3.11) sono equivalenti alla (3.9). Ne consegue la (3.10). ■

DOMANDA: a che serve la rappresentazione complessa?

RISPOSTA: è il trampolino di lancio verso la definizione di **trasformata di Fourier** (capitolo seguente).

### 3.3 Rappresentazione ampiezze-fasi

Ritornando al campo reale, un'altra rappresentazione della serie di Fourier è illustrata dal seguente:<sup>4</sup>

**Teorema 3.3.1** – *La serie di Fourier* (3.2),

$$Fx(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right),$$

ammette una **rappresentazione ampiezze-fasi**

$$(3.12) \quad Fx(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \left( \frac{n\pi t}{L} + \phi_n \right),$$

<sup>4</sup> Questa rappresentazione fa intervenire i coseni. Si può definire un'analogha rappresentazione con i seni.

con

$$(3.13) \quad A_0 = a_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}.$$

**Dimostrazione.** Esercizio.

DOMANDA: a che serve la rappresentazione ampiezze-fasi?

RISPOSTA: a stabilire le basi dell'**analisi armonica**, vale a dire l'**analisi dei suoni**.

### 3.4 Uguaglianza di Parseval

Si dimostra che se la serie di Fourier  $Fx(t)$  **converge uniformemente**<sup>5</sup> a  $x(t)$ , allora vale l'**uguaglianza di Parseval**

$$(3.14) \quad \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2.$$

Quest'uguaglianza ha notevoli implicazioni. Si osserva per esempio che, fornendo l'integrale a primo membro un numero, così come, ovviamente,  $a_0^2/2$  a secondo membro, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$$

è convergente. Ma questa serie è a termini positivi. Si ha quindi necessariamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0,$$

il che significa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0,$$

nonché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0.$$

Dunque, al crescere di  $n$ , i coefficienti reali  $a_n$  e  $b_n$  diminuiscono in valore assoluto, e i coefficienti  $c_n$ , nel piano complesso, si avvicinano all'origine.

**CONSEGUENZA PRATICA:** nelle applicazioni è sufficiente considerare la serie di Fourier 'troncata' ad un opportuno valore di  $n$ .<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Omettiamo in queste lezioni la definizione e la discussione del concetto di *convergenza uniforme* di una serie di funzioni. Sappia però lo studente che si tratta di una condizione di convergenza un po' più forte della *convergenza puntuale* corrispondente ad ogni prefissato valore della variabile  $t$ , peraltro prevista dalle condizioni di Dirichlet.

<sup>6</sup> Esistono in letteratura numerosi teoremi che valutano l'errore commesso con tale troncatura.

### 3.5 Analisi armonica

Consideriamo ora un segnale  $x(t)$  **periodico**. Questo significa che  $x(t)$  è definito per tutti i valori di  $t$  in  $\mathbb{R}$ , ma che si ripete tale e quale per ogni intervallo di ampiezza  $T$ , detta **periodo** del segnale.<sup>7</sup>

Un tipico esempio è quello di una nota prodotta da uno strumento musicale. Per le note musicali esistono varie ‘scale’. A fine paragrafo sono riportate le principali.

Le grandezze fisiche fondamentali di un segnale periodico sono il **periodo**  $T$ , la **frequenza**  $f$  (anche denotata con  $\nu$ ) e la **pulsazione**  $\omega$ . Esse sono legate fra loro dalle seguenti uguaglianze:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \text{periodo}, \\ f = \text{frequenza} = \frac{1}{T}, \\ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \end{array} \right.$$

Le serie di Fourier permettono di rappresentare un segnale periodico mediante successioni di numeri reali.

Siamo partiti col considerare un qualunque segnale  $x(t)$  in un prefissato intervallo  $[-L, L]$  di  $t$ . Per l’analisi di un segnale periodico è sufficiente considerare un intervallo di ampiezza uguale ad un periodo  $T$ . Sceglieremo quindi l’intervallo  $[-L, L] = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  come intervallo di base. Se allora adattiamo le definizioni (3.1) dei coefficienti di Fourier al caso periodico, troviamo che

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \text{valor medio del segnale}, \\ (3.15) \quad a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Le due successioni  $(a_n, b_n)$ , che in base a quanto visto con l’uguaglianza di Parseval, possono essere troncate ad un certo punto, rappresentano quindi il segnale periodico. Più significative sono però le successioni di ampiezze e fasi,  $A_n$  e  $\phi_n$ , definite dalle formule (3.13). Queste successioni, opportunamente troncate, producono due spettri:

Spettro delle ampiezze:  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n,$

Spettro delle fasi:  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n.$

<sup>7</sup> In effetti, occorre precisarlo, l’intervallo  $T$  è il minimo valore dell’intervallo temporale in cui il segnale si ripete.

Lo spettro di una nota caratterizza pienamente lo strumento che l'ha emesso: p.es., il La 220 Hz di un violino ha uno spettro che differisce dal La emesso da un clarinetto.

Noti questi spettri, il segnale periodico  $x(t)$  può essere ricostruito con una somma finita, troncando opportunamente lo sviluppo in serie (3.12):

$$Fx(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \phi_n\right),$$

Per  $n = 1$  si ha l'**armonica fondamentale**, per  $n > 1$  si hanno le **armoniche superiori**. È chiaro che, più armoniche si inseriscono nella somma, più la riproduzione di uno strumento è fedele.

\*\*\*

- La di Händel = 422,5 Hz.
- La della Francia '800 = 425 Hz.
- Scala diatonica (Pitagora): si basa su rapporti di numeri interi, cioè su numeri razionali.
- Scala temperata (J.S.Bach):

Scala temperata	
Nota	Frequenza
La	$220 = 220 \cdot 2^{\frac{0}{12}}$
La <sup>#</sup>	$233 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{1}{12}}$
Si	$247 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{2}{12}}$
Do	$262 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{3}{12}}$
Do <sup>#</sup>	$277 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{4}{12}}$
Re	$294 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{5}{12}}$

Scala temperata	
Nota	Frequenza
Re <sup>#</sup>	$311 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{6}{12}}$
Mi	$330 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{7}{12}}$
Fa	$349 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{8}{12}}$
Fa <sup>#</sup>	$370 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{9}{12}}$
Sol	$392 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{10}{12}}$
Sol <sup>#</sup>	$415 \simeq 220 \cdot 2^{\frac{11}{12}}$
La	$440 = 220 \cdot 2^{\frac{12}{12}}$