Complementi di Analisi per Informatica

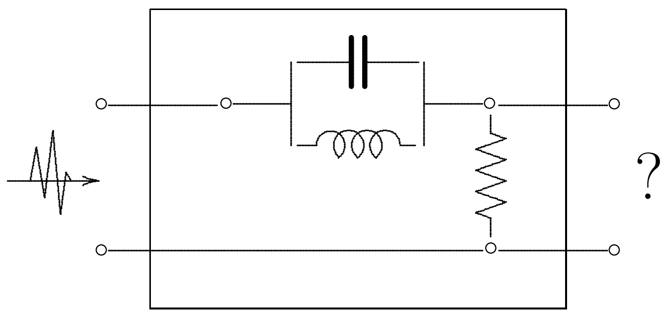
***

Capitolo 2

Numeri Complessi e Circuiti Elettrici

Sergio Benenti

Prima versione settembre 2017. Revisione gennaio 2020.



Indice

I numeri complessi si sono rivelati indispensabili non solo in importanti capitoli della Fisica, ma anche nella quotidiana Elettrotecnica.

2.1 Circuito elettrico elementare

La Fig. 2.1 mostra lo schema di un **circuito elettrico elementare** costituito da un generatore di tensione $V(t)$, variabile nel tempo, che alimenta un *carico*. Ci proponiamo di studiare la **relazione** intercorrente tra la tensione $V(t)$ e la corrente elettrica $I(t)$ assorbita dal carico e misurata da un amperometro A, relazione che dipenderà sia dalla legge temporale della tensione $V(t)$ sia dal tipo di carico.

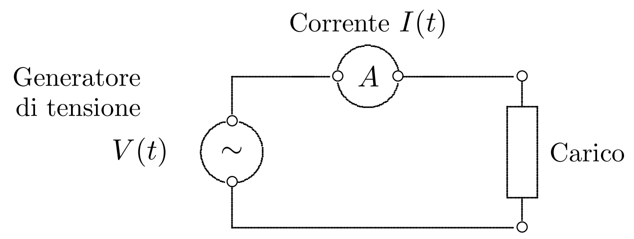
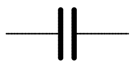
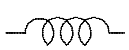


Figura 2.1: Circuito elettrico elementare.

I tre tipi fondamentali di carico sono illustrati nella Tabella 1.

Tabella 1 – **Elementi fondamentali passivi di un circuito elettrico**

Carico	Simbolo	Caratteristica fisica	Unità di misura
Resistore		$R =$ resistenza	Ohm
Condensatore		$C =$ capacità	Farad(ay)
Induttore		$L =$ induttanza	Henry

I legami $V \leftrightarrow I$ (tensione–corrente) che caratterizzano ciascuno di questi carichi sono retti dalle tre **leggi fondamentali** seguenti:

$$\boxed{V = R\,I, \qquad I = C\,\frac{dV}{dt}, \qquad V = L\,\frac{dI}{dt}} \tag{2.1}$$

La prima equazione, $V = RI$, è la **legge di Ohm**. Essa è di tipo algebrico, mentre le altre due sono di tipo differenziale.

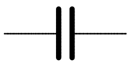
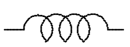
2.2 Regime stazionario in corrente alternata

Consideriamo il caso elementare, ma fondamentale per le applicazioni, in cui $V(t)$ ha la forma

$$V(t) = V_0 \cos \omega t.$$

dove V_0 è costante e $\omega > 0$ è la **pulsazione**.[1] Applicando le tre leggi fondamentali (2.1) si ottengono i risultati riportati nella Tabella 2.

Tabella 2 – **Relazioni tensione–corrente a regime stazionario**

Carico	Legge	Tensione	Corrente
	$V = RI$	$V = V_0 \cos \omega t$	$I = \dfrac{V_0}{R} \cos \omega t$
	$I = C \dfrac{dV}{dt}$	$V = V_0 \cos \omega t$	$I = -\omega C V_0 \sin \omega t = \omega C V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
	$V = L \dfrac{dI}{dt}$	$V = V_0 \cos \omega t$	$I = \dfrac{1}{\omega L} V_0 \sin \omega t = \dfrac{1}{\omega L} V_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Dall'ultima colonna osserviamo che a **regime stazionario**:t[2]

1. Per un carico puramente resistivo V ed I sono in fase.

2. Per un carico puramente capacitivo la corrente $I(t)$ è **in anticipo** rispetto alla tensione $V(t)$ di un angolo retto, $\pi/2$.

3. Per un carico puramente induttivo la corrente $I(t)$ è invece **in ritardo** di un angolo retto rispetto alla tensione $V(t)$.

Nelle figure 2.2, 2.3 e 2.4 vengono rappresentati questi tre casi. Per ognuno di questi, sul lato sinistro, è riportato il vettore tensione $\boldsymbol{V}(t)$ di lunghezza fissa V_0 che ruota intorno all'origine del piano (x, y) con velocità angolare costante ω, con posizione iniziale (ciè per $t = 0$) sull'asse x, e in senso antiorario. Le tre corrispondenti correnti $\boldsymbol{I}(t)$ sono solidalmente legate a $\boldsymbol{V}$, e quindi ruotano anch'esse con velocità angolare ω in senso antiorario. Le proiezioni di questi vettori sull'asse x sono riportate a destra, come funzioni del tempo t.

[1] Ricordiamo che $\omega = 2\pi f$, dove f è la frequenza (p.es. 50 Hertz per le linee elettriche europee).

[2] Quando un circuito elettrico si 'chiude' sopra un carico, cioè si mette in azione, inizia un fenomeno **transitorio** che dopo un certo tempo si stabilizza su di un **regime stazionario**.

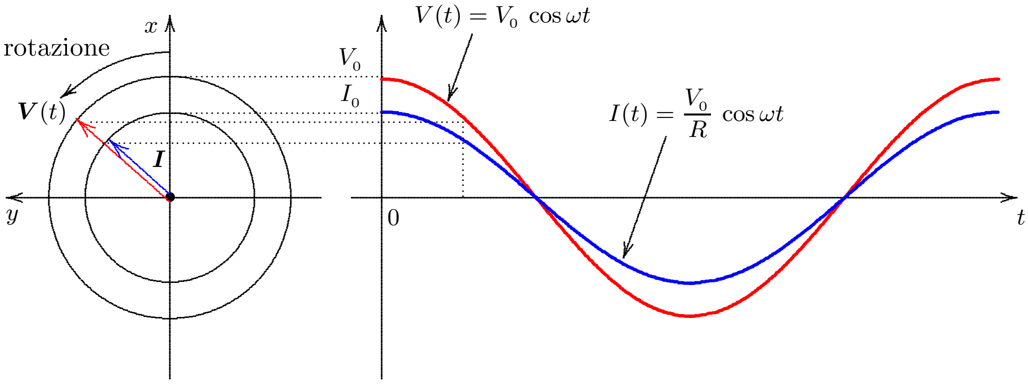


Figura 2.2: Carico resistivo, la corrente è in fase con la tensione.

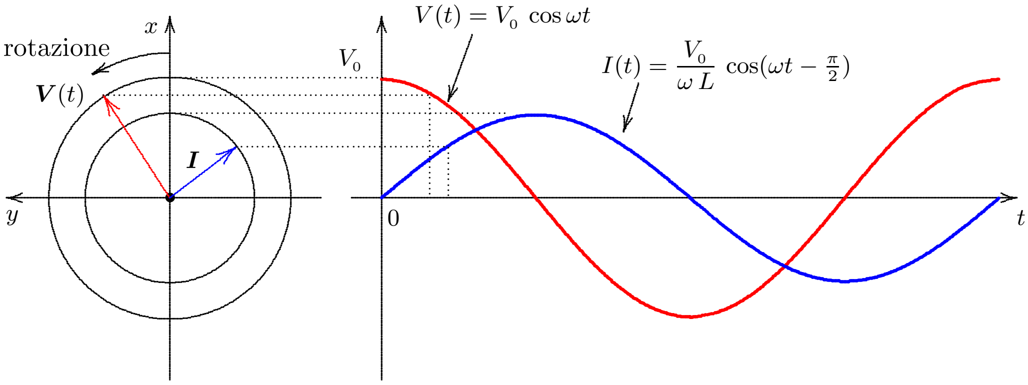


Figura 2.3: Carico induttivo, la corrente è in ritardo di 90° rispetto alla tensione.

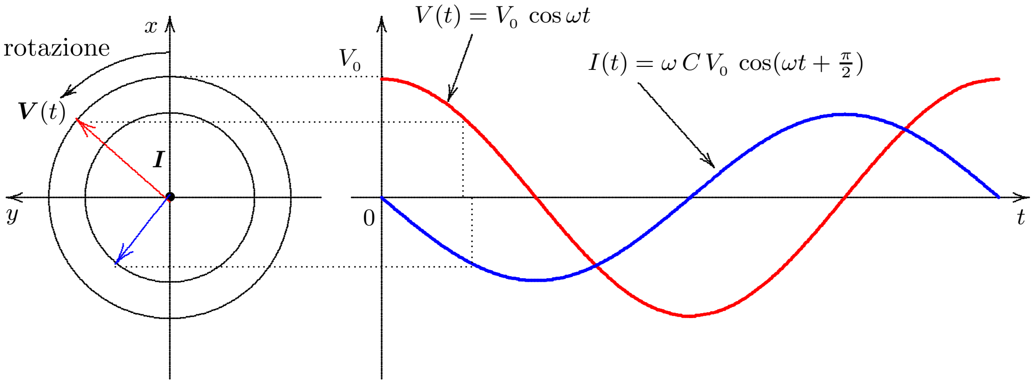


Figura 2.4: Carico capacitivo, la corrente è in anticipo di 90° sulla tensione.

2.3 La legge di Ohm nel campo complesso

Se identifichiamo il piano (x, y) col piano di Gauss dei numeri complessi $z = x + iy$, allora il vettore $\boldsymbol{V}(t)$ si può interpretare come numero complesso

$$V(t) = V_0\ (\cos\omega\, t + i\ \sin\omega t), \tag{2.2}$$

Se si utilizza la formula di Euler si può scrivere più brevemente

$$\boxed{V(t) = V_0\ e^{i\omega t}} \tag{2.3}$$

Si noti bene che qui si abbandona la notazione vettoriale in grassetto. Il vantaggio dell'utilizzo dei numeri complessi consiste nel fatto che, dovendo eseguire l'operazione di 'prodotto', è possibile farlo con i numeri complessi mentre per vettori in un piano una tale operazione non è definibile.

Come si è visto, per un carico puramente capacitivo la corrente $I(t)$ è sfasata di un angolo retto in anticipo rispetto alla tensione $V(t)$. Siccome la moltiplicazione di un numero complesso per i provoca la sua rotazione di 90° in senso antiorario, possiamo rappresentare questo sfasamento di anticipo moltiplicando la V per l'unità immaginaria i e quindi scrivere

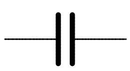
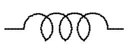
$$I = i\,\omega\, C\, V.$$

Analogamente, per un carico induttivo, per cui la tensione $V(t)$ è in anticipo rispetto alla corrente $I(t)$, scriviamo

$$V = i\,\omega\, L\, I.$$

Si può allora ricompilare la Tabella 2 in termini complessi:

Tabella 3 – **Relazioni tensione–corrente in termini complessi**

Carico	Legge	Tensione	Corrente
	$V = RI$	$V = V_0\ e^{i\omega t}$	$I = \dfrac{1}{R}\, V$
	$I = C\,\dfrac{dV}{dt}$	$V = V_0\ e^{i\,\omega t}$	$I = i\,\omega\, C\, V$
	$V = L\,\dfrac{dI}{dt}$	$V = V_0\ e^{i\omega t}$	$I = \dfrac{1}{i\,\omega\, L}\, V = \dfrac{-i}{\omega\, L}\, V$

La Tabella 3 mostra che le leggi elementari (2.1),

$$V = R\, I, \quad I = C\,\frac{dV}{dt}, \quad V = L\,\frac{dI}{dt},$$

assumono la forma algebrica (nel campo complesso)

$$\boxed{V = RI, \quad V = \frac{1}{i\,\omega\,C}\,I, \quad V = i\,\omega L\,I} \tag{2.4}$$

che è del tipo

$$\boxed{V = ZI} \tag{2.5}$$

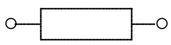
ponendo nei tre casi

$$\boxed{Z = R, \qquad Z = \frac{1}{i\,\omega\,C} = \frac{-i}{\omega\,C}, \qquad Z = i\,\omega\,L} \tag{2.6}$$

Queste tre Z prendono il nome di **impedenze**, rispettivamente di **impedenza resistiva**, **capacitiva**, **induttiva**.[3] La (2.5) prende il nome di **legge di Ohm complessa**.

L'inverso $1/Z$ di un'impedenza prende il nome di **conduttanza**.

Combinando fra loro in vario modo resistori, condensatori e induttori si può ottenere una impedenza Z di qualunque assegnato valore. Nella schematizzazione dei circuiti elettrici una generica impedenza viene indicata col simbolo



Per le impedenze si possono considerare due **composizioni fondamentali**: **impedenze in serie** e **impedenze in parallelo**.

Esercizio. Dimostrare che:

- *Le impedenze in serie si sommano* (fig. 2.5).
- *Per impendenze in parallelo si sommano le conduttanze* (fig. 2.6).

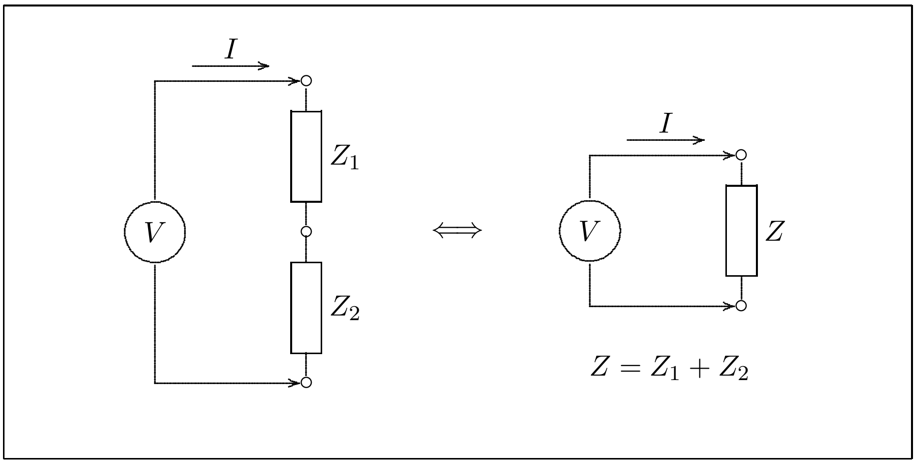


Figura 2.5: Impedenze in serie.

[3] Può far comodo denotarle con Z_R, Z_C e Z_L.

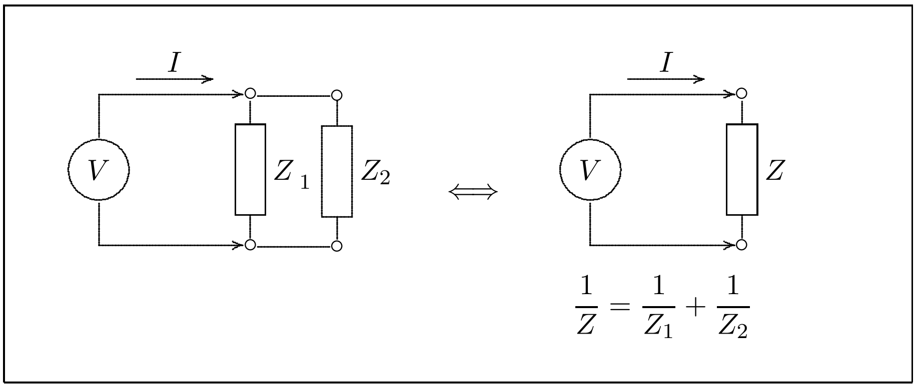
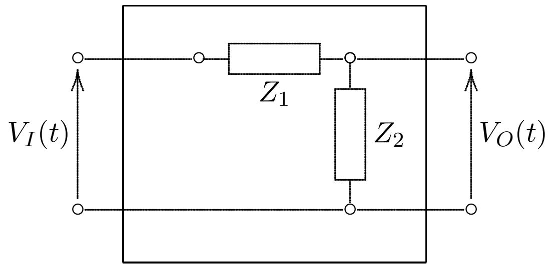


Figura 2.6: Impedenze in parallelo.

2.4 Blocchi e relazioni input-output

Nella figura che segue è descritto un **blocco**, rappresentato da un rettangolo all'interno del quale si trovano due impedenze Z_1 e Z_2. All'ingresso del blocco (posto a sinistra) viene applicata una tensione $V_I(t)$ variabile nel tempo, detta **segnale di entrata**. All'uscita (posta a destra) viene di conseguenza misurata una tensione $V_O(t)$ detta **segnale di uscita**. Assumiamo che la misura della tensione $V_O(t)$ non implichi assorbimento di corrente.[4]



Per come sono poste le impedenze la corrente elettrica I assorbita dall'ingresso è tale da soddisfare la legge di Ohm per due impedenze in serie:

$$V_I = (Z_1 + Z_2)\, I.$$

La tensione che si misura ai capi di Z_2, che coincide ovviamente con V_O, è data da

$$V_O = Z_2\, I.$$

Mettendo insieme queste due equazioni si trova che

$$\boxed{V_O = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\, V_I}$$

[4] I voltmetri sono supposti a impedenza infinita.

Quest'uguaglianza esprime dunque la relazione tra il segnale d'ingresso ed il segnale di uscita. Possiamo allora chiamare la funzione complessa

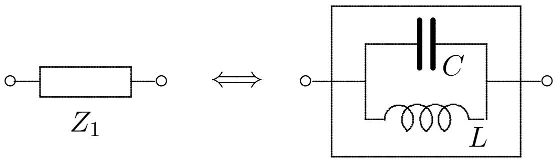
$$G = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

funzione di trasferimento del blocco, potendosi scrivere

$$\boxed{V_O = G\, V_I}$$

Dunque il segnale di uscita è uguale al prodotto del segnale di entrata per la funzione di trasferimento.

Consideriamo il caso in cui $V_I(t)$ è ti tipo sinusoidale, cioè del tipo (2.3) e Z_1 è costituita da un condensatore e da un induttore posti in parallelo:



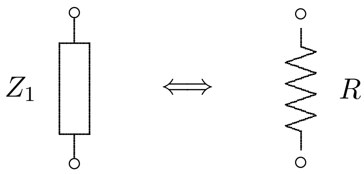
Dunque:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = i\,\omega\, C + \frac{1}{i\,\omega\, L} = \frac{1 - \omega^2\, L\, C}{i\,\omega\, L}$$

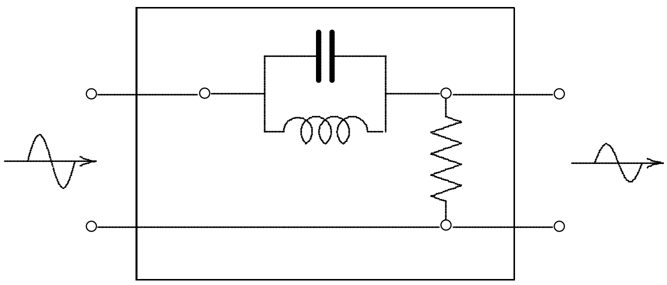
cioè

$$Z_1 = \frac{i\,\omega\, L}{1 - \omega^2\, L\, C}.$$

Ora, al posto di Z_2 poniamo una pura resistenza, $Z_2 = R$,



per cui il blocco contiene il circuito seguente:



Costruiamo la funzione di trasferimento:

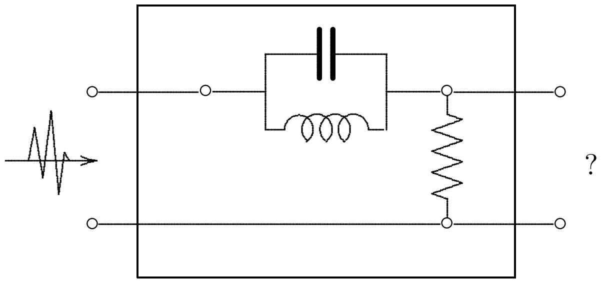
$$G = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{Z_1 + R} = \frac{R}{\dfrac{i\,\omega\, L}{1 - \omega^2\, L\, C} + R} = \frac{R\,(1 - \omega^2\, L\, C)}{i\,\omega\, L + R\,(1 - \omega^2\, L\, C)}.$$

Vediamo che al limite per ω^2 che tende a $1/LC$ il segnale in uscita V_O tende a zero. Ciò significa che un segnale sinusoidale con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

'non passa' attraverso il blocco.

Si pone la questione: se in ingresso abbiamo un segnale $V_I(t)$ qualsiasi, come possiamo calcolare il segnale di uscita?



Ritorneremo su questo argomento più avanti.