Corso di Matematica A per la Laurea in Chimica

a.a. 2003/04

S. Benenti, C. Chanu, A. Fino

Ultima versione marzo 2006

Con esercizi e temi d'esame svolti

Indice

Capitolo 1 - **I numeri.**

Capitolo 2 - **Le funzioni.**

Capitolo 1

I numeri.

1.1 - Numeri naturali. I primi numeri che impariamo a utilizzare, fin dall'infanzia, sono i **numeri naturali**. Li rappresentiamo con opportune combinazioni di dieci simboli o "cifre", $0, 1, 2, \dots, 9$. Li usiamo per "contare" (cioè per quantificare il numero degli elementi di un insieme), per "ordinare" gli elementi di un insieme (per formare cioè delle "graduatorie"), per "calcolare" (secondo le regole dell'Aritmetica e dell'Algebra) e infine, per "misurare" o "valutare" certe grandezze (tempi, lunghezze, ecc). I matematici denotano l'insieme di questi numeri, includendo lo zero, con $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \text{insieme dei } \textbf{numeri naturali} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11, \dots, 2314, \dots\}.$$

1.2 - Numeri interi e numeri razionali. Ci si accorge però abbastanza presto che, per "calcolare" e "misurare", questi numeri non bastano: le operazioni inverse della somma e della moltiplicazione, la sottrazione e la divisione, in certi casi non possono essere eseguite (non si puó sottrarre per esempio 5 da 3 o dividere 5 per 3). Ma il matematico aggira quest'impossibilità semplicemente ampliando l'insieme degli "oggetti" con cui vuole fare i calcoli, continuando a chiamarli "numeri". Questo ampliamento lo esegue in due passi successivi: (1) Introduce i numeri interi **negativi**, che insieme a quelli naturali, che chiama **positivi** (salvo lo 0), formano l'insieme più ampio dei **numeri interi relativi** denotato con $\mathbb{Z}$ (dal tedesco "Zahl", numero)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \text{insieme dei } \textbf{numeri interi} \\ &= \{\dots - 2314, \dots, -11, -10, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11, \dots, 2314, \dots\} \end{aligned}$$

In quest'insieme l'operazione di sottrazione ha sempre un risultato. I numeri naturali ne costituiscono un sottinsieme:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

(2) Introduce le **frazioni** di numeri interi,

$$q = \frac{n}{d}, \quad n, d \in \mathbb{Z}, \quad d \neq 0 \quad \begin{cases} n = \text{numeratore} \\ d = \text{denominatore} \end{cases}$$

con le quali può sempre eseguire la divisione, e rendere più raffinate le misure. Le frazioni rappresentano un nuovo insieme di numeri, i **numeri razionali**,

$$\mathbb{Q} = \text{insieme dei numeri razionali}.$$

Sulla relazione *frazione* $\leftrightarrow$ *numero razionale* occorre fare tre osservazioni importanti: (i) due frazioni distinte rappresentano lo stesso numero razionale (si dice allora che le frazioni sono "equivalenti") quando si ottengono l'una dall'altra moltiplicando (o dividendo) numeratore e denominatore per uno stesso numero intero. P.es.

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{-3}{-5}$$

rappresentano lo stesso numero razionale. (ii) Fra tutte le frazioni equivalenti ad una data frazione ne esiste una particolare, a cui conviene quasi sempre riferirsi, che ha denominatore e numeratore **primi fra loro**, cioè senza fattori interi in comune, e *denominatore positivo.* Nell'esempio precedente è la frazione 3/5. (iii) L'insieme $\mathbb{Q}$ contiene come particolare sottoinsieme l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, rappresentati dalle frazioni con denominatore $d = 1$ (ovvero dalle frazioni cosiddette "apparenti", in cui il numeratore è un multiplo del denominatore):

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

1.3 - Rappresentazione decimale. Ogni numero razionale ammette una **rappresentazione decimale**, che utilizza i soliti dieci simboli e la virgola (o il punto, nella scrittura anglosassone). P.es. il numero razionale considerato sopra, 3/5, è rappresentato con la scrittura 0,6 (oppure con .6). Si può di conseguenza osservare che, mentre un numero razionale è rappresentabile in infiniti modi come frazione di numeri interi, esso ammette una sola rappresentazione decimale. Ci sono però due fatti particolari che mettono in crisi questa osservazione: (1) alcuni numeri razionali non ammettono una rappresentazione decimale **finita**, cioè esprimibile con un numero finito di cifre: si tratta dei numeri **periodici**. P.es. $\frac{1}{3}$ è rappresentato con $0{,}\bar{3} = 0{,}333333\ldots$. (2) alcuni numeri razionali ammettono due rappresentazioni (di cui una periodica) equivalenti; i matematici attribuiscono per esempio lo stesso significato alle scritture 1 e $0{,}\bar{9} = 0{,}99999\ldots$. Non dobbiamo tuttavia addentrarci eccessivamente in questi argomenti, ma tenere solo sempre ben presente le osservazioni seguenti (che varranno anche per i numeri reali, che vedremo tra breve):

> (1) *I numeri sono enti astratti, rappresentabili anche con delle lettere, coi quali si eseguono dei calcoli espressi mediante "formule", con assoluta precisione.*
>
> (2) *La precisione nei calcoli può venire meno solo quando si ricorre alla rappresentazione decimale, che per i numeri razionali periodici e per i numeri irrazionali è sempre inevitabilmente approssimata.*
>
> (3) *Le "macchine" calcolatrici, compreso l'uomo, sanno elaborare calcoli anche molto complessi ma solo attraverso la loro riduzione alle operazioni aritmetiche elementari (somma/differenza, moltiplicazione/divisione) e solo con numeri interi, rappresentati eventualmente mediante due soli simboli,* 0 *e* 1 (**rappresentazione binaria**)*, come nel caso degli elaboratori elettronici.*

Ricordiamo ancora che nella rappresentazione di numeri decimali (p.es. di numeri con tanti zeri) è comodo utilizzare le potenze del 10, anche negative: $51000 = 51 \cdot 10^3$, $0{,}0051 = 51 \cdot 10^{-4}$, ecc.

1.4 - Totale ordinamento. I numeri razionali possiedono due proprietà importanti: (1) l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è **ordinato**, ammette cioè una "relazione", che i matematici chiamano **relazione d'ordine totale**, espressa coi simboli $\leq$ (minore-uguale), $\geq$ (maggiore-uguale), $<$ (minore, in senso stretto), $>$ (maggiore, in senso stretto). Ciò significa che, dati comunque due numeri razionali a e b, vale solo una delle tre relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

Si può anche dire che vale una delle due disuguaglianze "attenuate"

$$a \leq b, \quad a \geq b,$$

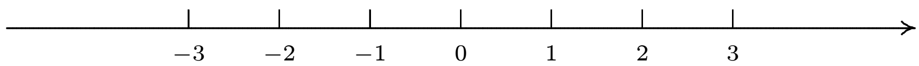
senza escludere che esse valgano contemporaneamente, nel qual caso $a = b$. (2) Tra due numeri razionali distinti, $a \neq b$, ve ne sono infiniti altri. Vale a dire: se $a < b$ allora esistono infiniti numeri c tali che $a < c < b$.

La rappresentazione decimale dei numeri razionali consente un'immediata valutazione della loro relazione d'ordine. P.es. si riconosce che $\frac{5}{7} > \frac{9}{13}$ dalla rappresentazione decimale delle due frazioni: $0{,}7142857 > 0{,}6923076$. La relazione d'ordine tra numeri razionali si può tuttavia riconoscere direttamente, attraverso disuguaglianze fra numeri interi, osservato che, con denominatori positivi,

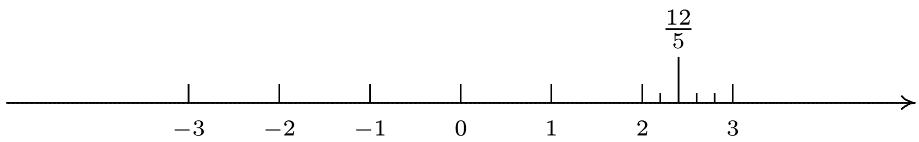
$$\frac{n}{d} \leq \frac{n'}{d'} \quad \Longleftrightarrow \quad nd' \leq n'd.$$

Nell'esempio di prima si vede che $\frac{5}{7} > \frac{9}{13}$, perché è $13 \cdot 5 = 65 > 9 \cdot 7 = 63$.

1.5 - Rappresentazione grafica. Per "visualizzare" la relazione d'ordine, ma non solo per questo, i numeri razionali possono essere identificati con "punti" di una linea retta. Si tratta di una rappresentazione (che estenderemo ai numeri reali) basata su concetti geometrici intuitivi e che utilizza due strumenti "ideali": la *riga* ed il *compasso*. Tracciata con una riga una retta, si fissano due punti, rappresentanti i numeri 0 e 1. Il punto rappresentante lo zero si dice **origine**. La distanza fra questi due punti, ripresa col compasso, serve da unità di misura per tracciare tutti i punti rappresentativi dei numeri interi, positivi e negativi. È d'uso scegliere la retta orizzontale ed il numero 1, quindi tutti i numeri positivi, alla destra di 0. Ciò significa dare un **verso** o **orientamento** alla retta, indicato con la freccia.



In questa rappresentazione tutti i numeri razionali sono "costruibili" mediante l'uso di riga e compasso, perché con questi strumenti è possibile dividere un segmento in un qualunque numero di parti uguali. Per esempio, il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{12}{5}$, osservato che esso è uguale a $2+\frac{2}{5}$, si determina dividendo in 5 parti uguali il segmento che va da 2 a 3 e considerando la seconda di queste suddivisioni

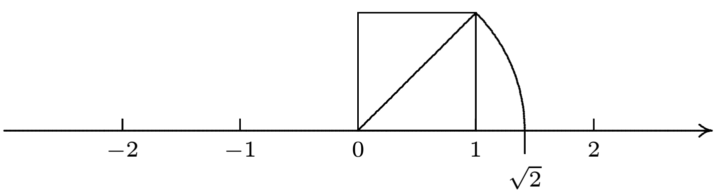


Si definisce **valore assoluto** di un numero a la sua distanza dall'origine e lo si denota con $|a|$. Si ha allora $|a| = a$ se a è positivo, $|a| = -a$ se a è negativo.

1.6 - Numeri irrazionali. La rappresentazione grafica dei numeri razionali, cioè la loro identificazione con punti di una retta, rende immediatamente percettibile la relazione d'ordine: $a < b$ significa che il punto rappresentante a si trova prima di b, percorrendo la retta nel verso considerato, ovvero alla sinistra di b. Essa rende inoltre intuitivamente accettabile il fatto che tra due numeri distinti ne esistono infiniti altri. Tutto questo sembrerebbe ragionevole e, sia dal punto di vista geometrico che da quello algebrico-aritmetico, i numeri razionali svolgerebbero compiutamente il loro ruolo ed il matematico, insieme ad ogni utente della matematica, non avrebbe altro da desiderare. Ma non è così. Bastano alcune semplici considerazioni, suffragate da un "esempietto", per mandare in crisi questa soddisfazione (cosa che effettivamente avvenne ai tempi di Pitagora, 570-490 A.C.). Il fatto è questo: *i numeri razionali non sono sufficienti a rappresentare tutti i punti della retta; in altri termini, si possono costruire sulla retta (con riga e compasso) dei punti che non corrispondono a numeri razionali*; conclusione: *esistono dei numeri costruibili geometricamente che però sfuggono alla nostra concezione di numero "razionale"*: li chiameremo **irrazionali**.

L'esempietto in questione consiste in due ragionamenti distinti riguardanti la "radice quadrata di 2", uno geometrico, l'altro algebrico. Questa radice, che si usa denotare con $\sqrt{2}$, è per definizione quel numero che moltiplicato per se stesso dà come risultato 2. Il ragionamento geometrico seguente mostra che $\sqrt{2}$ è costruibile, come punto sulla retta numerica, con riga e compasso: quindi *secondo i "geometri" $\sqrt{2}$ è un numero.*

$\boxed{\text{E}}$ Si consideri, sul piano su cui è tracciata la retta numerica, il quadrato di lato 1 appoggiato sul segmento (0,1). La sua diagonale ha una lunghezza d tale che (per il Teorema di Pitagora) $d^2 = 1 + 1 = 2$. Quindi $d = \sqrt{2}$. Con il compasso centrato nello 0 si riporti sull'asse numerico la lunghezza della diagonale. Si ottiene un punto che rappresenta il numero $\sqrt{2}$.



Il ragionamento algebrico seguente mostra invece che *il numero $\sqrt{2}$ non è razionale*; quindi per quei matematici che "vivono" solo nel mondo ristretto dei numeri razionali $\sqrt{2}$ non è un numero.

$\boxed{\text{E}}$ La dimostrazione che $\sqrt{2}$ non coincide con nessuna frazione di numeri interi si fa per assurdo. Si supponga $r^2 = 2$ e $r = \frac{n}{d}$ con n e $d \neq 0$ interi. Non è restrittivo supporre che questi interi siano positivi e primi fra loro, cioè che non ammettano nessun divisore intero positivo comune. Si ha allora la seguente successione di implicazioni:

$$\left.\begin{array}{r} r = \dfrac{n}{d} \\ r^2 = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2d^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ è pari} \quad \Rightarrow \quad n \text{ è pari,}$$

perché se il quadrato di un numero è pari allora il numero è pari (il quadrato di un numero dispari è dispari). Continuiamo:

$$n \text{ pari} \quad \Rightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} \mid n = 2m \quad \Rightarrow \quad 4m^2 = 2d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2 \text{ è pari} \quad \Rightarrow \quad d \text{ è pari.}$$

Concludiamo che n e d sono entrambi pari. Ciò contraddice l'ipotesi fatta (peraltro finora non intervenuta) che essi siano primi fra loro: assurdo.

1.7 - Numeri reali. La via d'uscita da questo conflitto, che vede la geometria prevalere sull'algebra (nel senso che, apparentemente, la geometria crea delle entità che l'algebra non può creare né ammettere) è, in linea di principio, semplice: se si insiste nel voler far corrispondere un numero ad ogni punto della retta numerica, si devono per forza introdurre dei nuovi numeri, che chiameremo **irrazionali**. I numeri razionali e gli irrazionali costituiranno un nuovo insieme numerico, che chiameremo dei **numeri reali** e denoteremo con $\mathbb{R}$. Questi numeri saranno in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: la **retta reale**. Per questo motivo "punto" sulla retta reale sarà sinonimo di "numero reale". Ma come si possono costruire i numeri reali partendo dai razionali? Come si può, in altri termini, estendere l'insieme $\mathbb{Q}$ a questo ipotetico insieme numerico allargato $\mathbb{R}$? E quali proprietà avrà $\mathbb{R}$ in più rispetto a $\mathbb{Q}$? Le risposte a queste domande sono state date dai matematici nel corso di una lunga e profonda elaborazione teorica. Fortunatamente, per gli scopi di questo corso, non è necessario addentrarsi in questi argomenti. È comunque necessario sapere due cose.

(1) La proprietà aggiuntiva posseduta da $\mathbb{R}$, e <u>non</u> da $\mathbb{Q}$, si chiama **completezza** o **continuità**. Vi sono varie formulazioni equivalenti di questa proprietà. Una è la seguente:

> *Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ sono due sottoinsiemi non vuoti di numeri reali, tali che $a \leq b$, qualunque siano $a \in A$ e $b \in B$, allora esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$, per ogni $a \in A$ e $b \in B$.*

(2) Vale per i numeri reali $\mathbb{R}$ quanto si è detto nei tre punti in corsivo del §1.3. Va ancora una volta ribadito che un numero reale, per quanto ben definito, può non ammettere una rappresentazione decimale finita (cioè composta da un numero finito di cifre) ma solo una rappresentazione approssimata, raffinata quanto si vuole, ma sempre approssimata. Un esempio è la solita radice quadrata di 2: $\sqrt{2}$ è un "numero" ben definito che possiamo coinvolgere nei nostri calcoli simbolici con le usuali regole dell'algebra. Ma quando dobbiamo utilizzarlo in una qualche applicazione concreta, siamo necessariamente costretti ad essere imprecisi: se sopportiamo di essere grossolani lo rappresentiamo con il numero decimale 1,4; se vogliamo essere un pochino più precisi con 1,414, ecc.

1.8 - Numeri algebrici e trascendenti. Sono detti **algebrici** quei numeri reali che sono <u>radici</u> (cioè soluzioni) di <u>equazioni</u> <u>algebriche</u> <u>a</u> <u>coefficienti</u> <u>interi</u>. I numeri razionali e le radici n-esime di numeri razionali sono esempi di numeri algebrici. I numeri reali che non sono algebrici sono detti **trascendenti**. Tra questi, i più ricorrenti nelle applicazioni sono π (p-greco) ed il **numero di Neper** e, approssimativamente rappresentati con

$$\pi \simeq 3{,}14 \qquad , \qquad e \simeq 2{,}71.$$

Ma, mentre la definizione di π è, dal punto di vista geometrico-intuitivo, abbastanza semplice (rapporto tra lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro, oppure area di un disco di raggio 1), la definizione del numero e richiede un apparato matematico più raffinato (che vedremo nel prossimo capitolo).

1.9 - Il calcolo delle radici. Quanto detto nelle due osservazioni precedenti fa sorgere subito qualche domanda: una volta definito (in maniera precisa) un numero reale, come lo si calcola? Come si calcolano, per esempio, le sue prime 2 o 1000 cifre decimali? Oggi basta premere qualche tasto su di un calcolatore tascabile per avere "istantaneamente" la radice quadrata di un numero almeno alla quinta o sesta cifra decimale. Ma quali sono le operazioni che il calcolatore esegue? E come si può procedere per calcolare la radice cubica (o quarta, ecc.) di un numero se il calcolatore non possiede questa "funzione" ? Vediamo una "ricetta", altrettanto semplice quanto potente, che ha il pregio di introdurci alla nozione di **successione** (infinita) di numeri razionali. Questa ricetta è conseguenza di alcune prime fondamentali conquiste del "calcolo differenziale" che vedremo nel prossimo capitolo.

$\boxed{\text{L}}$ Il calcolo delle radice quadrata $\sqrt{c}$ di un numero c (razionale, positivo) si basa sulla seguente **formula iterativa**:

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Questa formula genera una **successione** di numeri razionali

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

il cui elemento generico è denotato con a_n. La formula consente di calcolare il termine successivo a_{n+1}, conoscendo solo a_n. È quindi chiaro che occorre fissare a_0 e che tutta la successione dipenderà da questa scelta "iniziale". Ma la cosa notevole (e sorprendente, fintantoché non la si dimostra) è che

$\boxed{!}$ *comunque si scelga $a_0 > 0$, i numeri della successione iterata a_n si avvicinano sempre, al crescere di n, allo stesso numero positivo $\sqrt{c}$.*

In altri termini, con l'aumentare del numero dei "passi" iterativi otteniamo una migliore approssimazione della radice quadrata di c (ricordiamo che la precisione assoluta non la otterremo <u>mai</u>, anche per valori di n molto grandi, se non per valori particolari di c). I matematici esprimono un fatto del genere dicendo che

- *la successione definita dalla* (1) <u>*converge*</u> <u>*a*</u> $\sqrt{c}$ e scrivono

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{c}. \tag{2}$$

Usano anche dire che <u>*la*</u> <u>*successione*</u> *ha* <u>*limite*</u> $\sqrt{c}$ o che <u>*tende*</u> <u>*a*</u> $\sqrt{c}$.

Le seguenti tabelle, ottenibili anche con un qualunque "foglio elettronico", mostrano il risultato di 6 passi per il calcolo di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, a partire da $a_0 = 3$:

$\sqrt{2} =$

n	c	a_n	a_{n+1}
0	2	3	1.833333333
1	2	1.833333333	1.462121212
2	2	1.462121212	1.41499843
3	2	1.41499843	1.41421378
4	2	1.41421378	1.414213562
5	2	1.414213562	1.414213562
6	2	1.414213562	<u>1.414213562</u>

$\sqrt{3} =$

n	c	a_n	a_{n+1}
0	3	3	2
1	3	2	1.75
2	3	1.75	1.732142857
3	3	1.732142857	1.73205081
4	3	1.73205081	1.732050808
5	3	1.732050808	1.732050808
6	3	1.732050808	<u>1.732050808</u>

Come si è detto, la scelta di a_0 è arbitraria, ma in genere è meglio scegliere a_0 non troppo lontano da un valore stimato della radice: si raggiunge una buona approssimazione in un numero minore di passi. Provare ad assegnare ad a_0 altri valori, diversi da 3, anche molto grandi.

N.B. Se si parte invece da un numero $a_0 < 0$ si produce una successione che tende a $-\sqrt{2}$. Ci si renderà pienamente conto di questo fatto solo conoscendo la teoria che sta alla base di queste formule.

L Se si vuole invece calcolare la radice p-esima $\sqrt[p]{c}$, con $p \in \mathbb{N}$ qualsiasi (non nullo) e c razionale positivo, si usa la formula iterativa

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^p - c}{p\, a_n^{p-1}}, \tag{3}$$

che si riduce alla (1) per $p = 2$. Per esempio, la radice cubica si calcola con la formula

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^3 - c}{3\, a_n^2}. \tag{4}$$

Anche per la successione definita dalla (3) si può scrivere che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt[p]{c}. \tag{5}$$

Impostando su di un foglio elettronico la formula (4) e la (3) per $p = 4$ si ottengono le seguenti tabelle, che danno $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{2}$ (partendo p.es. da $a_0 = 2$ e $a_0 = 5$, rispettivamente):

$\sqrt[3]{3} =$

n	c	a_n	a_{n+1}
0	3	2	1,583333333
1	3	1.583333333	1.454447522
2	3	1.454447522	1.442351584
3	3	1.442351584	1.442249578
4	3	1.442249578	1.44224957
5	3	1.44224957	1.44224957
6	3	1.44224957	<u>1.44224957</u>

$\sqrt[4]{2} =$

n	c	a_n	a_{n+1}
0	2	5	3.754
1	2	3.754	2.824951205
2	2	2.824951205	2.140892158
3	2	2.140892158	1.656623981
4	2	1.656623981	1.35244405
5	2	1.35244405	1.216454337
6	2	1.216454337	1.190108982
7	2	1.190108982	1.18920814
8	2	1.18920814	1.189207115
9	2	1.189207115	1.189207115

Come si vede, nella seconda tabella occorrono più passi per raggiungere un valore "stabile".

Qual è l'origine di queste formule? Alla fine del prossimo capitolo saremo in grado di costruircele da soli; non solo, ma saremo anche in grado di costruire formule iterative atte a determinare le radici reali di una qualunque equazione, seguendo il **metodo di Newton** (o **metodo delle tangenti**).

! Queste formule iterative coinvolgono solo le operazioni elementari su frazioni (somma e prodotto) cioè solo operazioni razionali. Quindi, partendo da un a_0 razionale, cioè da una frazione di numeri interi o semplicemente da un numero intero, e facendo "a mano" i calcoli, si ottengono via via sempre delle frazioni. P.es., per calcolare $\sqrt{2}$ partendo da $a_0 = 3$, troviamo successivamente

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{1}{2}\,(3 + \tfrac{2}{3}) = \tfrac{11}{6},\\
a_2 &= \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{11}{6} + 2\,\tfrac{6}{11}) = \tfrac{193}{132},\\
a_3 &= \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{193}{132} + 2\,\tfrac{132}{193}) = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{72097}{25476},\\
a_4 &= \ldots
\end{aligned}$$

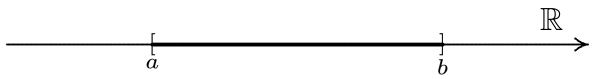
Questa successione è esatta, proprio perché si sono manipolate frazioni di numeri interi. Invece la successione trovata dal calcolatore (vedi sopra), che usa la rappresentazione decimale dei numeri razionali, comporta degli errori. Infatti già al primo passo "fatto a mano" troviamo $a_1 = \frac{11}{6}$ che, purtroppo per il calcolatore, è periodico: il calcolatore è costretto a troncarlo e quindi ad introdurre un errore. Conclusione: l'uomo è più preciso del calcolatore. Ma il calcolatore è più veloce e, se ben guidato dall'uomo, può gestire al meglio i propri errori.

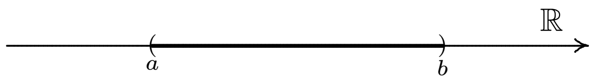
1.10 - Intervalli. Per poter trattare correttamente coi numeri abbiamo bisogno di una adeguata e ben definita terminologia. Il matematico assegna ad ogni termine che introduce un significato ben preciso che prescinde dal suo significato linguistico corrente e/o intuitivo. P.es., tra poche righe vedremo introdotto il termine "chiuso", a proposito degli "intervalli". Con questa parola il matematico intende qualcosa di ben definito, che non ha niente a che fare con i significati correnti della parola "chiuso" (non accessibile, non attraversabile, ecc.). Ogni frase o proposizione atta ad introdurre in maniera chiara ed inequivocabile un termine matematico prende il nome di **definizione**. In queste lezioni per ogni termine oggetto di una definizione usiamo il carattere grassetto.

Un **intervallo** è (leggi: con la parola "intervallo" il matematico intende) un insieme di numeri reali compresi tra due numeri a e b, $a < b$, detti **estremi** dell'intervallo, quindi rappresentato sulla retta reale da un segmento. L'intervallo si dice **chiuso** se gli estremi sono considerati appartenenti all'insieme, **aperto** se sono esclusi. Nel primo caso lo si denota con $[a, b]$, nel secondo con (a, b) o anche con $]a, b[$; si pone cioè

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \qquad \text{intervallo chiuso}$$
$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \qquad \text{intervallo aperto}$$

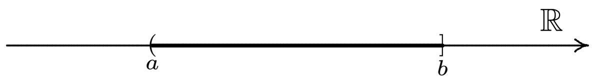
Useremo, rispettivamente, la rappresentazione grafica seguente





Si possono anche considerare intervalli **semichiusi** (o **semiaperti**). P.es.

$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



è un intervallo **aperto a sinistra** (o **aperto inferiormente**) e **chiuso a destra** (o **chiuso superiormente**). Gli intervalli fin qui visti si dicono **limitati**. Si considerano anche **intervalli illimitati**, rappresentati da semirette. P.es.

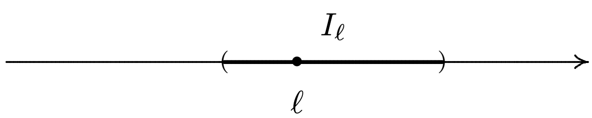
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

è un intervallo **illimitato a destra** (o **superiormente**) e chiuso a sinistra. Vi è un solo intervallo illimitato sia a destra che a sinistra: è tutto l'asse reale

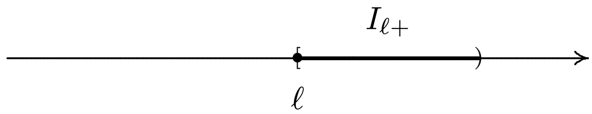
$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

In queste notazioni si usano i due simboli $+\infty$ e $-\infty$, $+$ **infinito** e $-$ **infinito**. Si noti bene che questi sono "puri simboli" e non rappresentano quindi né numeri né punti della retta reale (anche se talvolta si usa dire che $+\infty$ è il "punto all'infinito positivo" della retta). Dato un intervallo, un punto si dice **interno** a quell'intervallo se appartiene all'intervallo ma non coincide con uno degli estremi.

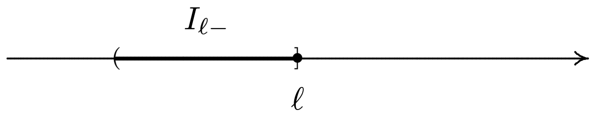
1.11 - Intorni di un numero. Altrettanto importante come quella di intervallo è la nozione di "intorno". Un **intorno di un numero** ℓ è per definizione un intervallo aperto, limitato o no, contenente ℓ:



Quindi un punto possiede infiniti intorni (in particolare $\mathbb{R}$ è intorno di ogni numero reale). Malgrado questa sua estrema genericità, il concetto di intorno è di fondamentale importanza e grande utilità in matematica. Si considerano anche **intorni unilaterali**; quelli di prima erano **bilaterali**. Un **intorno destro** $I_{\ell+}$ di ℓ è un intervallo avente ℓ come estremo sinistro, chiuso a sinistra (quindi contenente ℓ) e aperto a destra:



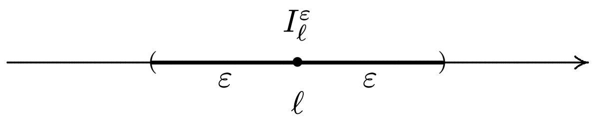
Analoga definizione si ha per un **intorno sinistro** $I_{\ell-}$:



Sovente è conveniente (e non restrittivo) considerare **intorni simmetrici** di un numero ℓ, caratterizzati da un numero positivo ε, detto **raggio dell'intorno**, del tipo:

$$\begin{aligned} I_\ell^\varepsilon &= (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \ell| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Si noti che con quest'ultima scrittura, $|x - \ell| < \varepsilon$, si afferma che la distanza di x da ℓ è inferiore a ε.



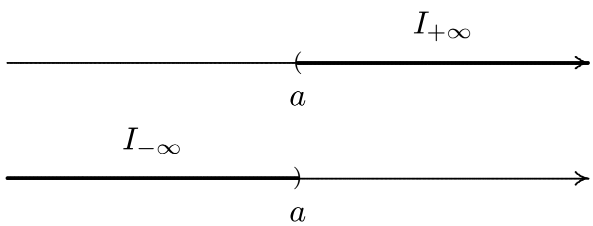
1.12 - Intorni dell'infinito. Come si è detto, molto importanti sono i simboli $+\infty$, $-\infty$. Essi sono, in un certo senso, *definiti* dai loro intorni. Diciamo **intorno di** $+\infty$ (oppure di $-\infty$) un intervallo aperto illimitato a destra (o a sinistra), cioè un insieme del tipo

$$I_{+\infty} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} = (a, +\infty)$$

o

$$I_{-\infty} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a).$$

Sulla retta reale:



Si noti che $\mathbb{R}$ è intorno, oltre che di ogni numero, e anche di $+\infty$ e di $-\infty$.

1.13 - Successioni di numeri. Una prima notevole applicazione del concetto di intorno si ha nella definizione rigorosa di **limite di una successione numerica**. Vediamo innanzitutto la definizione di successione:

- *Una* **successione** *di numeri è una legge che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un ben definito numero a_n.*

Questa "legge" può essere espressa da una formula che permette di calcolare il termine n-esimo di una successione a partire dall'intero n. P.es. la formula

$$a_n = n(n+1)$$

determina la successione, a partire da $n = 0$,

$$0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20, \ldots$$

La formula

$$a_n = \tfrac{1}{n^2}$$

determina la successione, a partire da $n = 1$,

$$1,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{16}, \ldots$$

Una successione può però anche essere definita con una formula iterativa, mediante la quale il termine generico a_n è determinato dal termine precedente a_{n-1}, come nel caso della successione

$$a_n = \tfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}\right), \tag{1}$$

o anche da più termini immediatamente precedenti, come nel caso della successione

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \tag{2}$$

dove il termine generico è dato dalla somma dei due elementi precedenti. In questi casi occorre ovviamente assegnare il termine iniziale, caso (1), o i termini iniziali, caso (2). Con diversi termini iniziali, una formula iterativa definisce (in genere) successioni diverse. Si noti bene che la formula iterativa (1) è <u>identica</u> alla formula iterativa (1) di §1.9 (dove si definisce il termine a_{n+1}. La formula iterativa (2), fatta iniziare con $n = 2$ e con $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, determina la successione

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots \tag{3}$$

nota come **successione di Fibonacci** (matematico pisano, inizi del 1200), che ha trovato numerose applicazioni (recentemente anche alla teoria delle "onde di Elliot", la quale pare fornire un modello abbastanza attendibile, per quanto empirico, dell'andamento dei mercati azionari).

Vediamo ora la definizione di convergenza.

- *Una successione di numeri a_n si dice* **convergente** *ad un numero λ, o che* **tende a** *λ, o che ha* **limite** *λ, e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda,$$

se, comunque si scelga un intorno (*) di λ, da un certo punto in poi, cioè a partire da un certo elemento della successione, tutti gli elementi che lo seguono cadono in quell'intorno. La scrittura formale di questa definizione è la seguente:

$$\forall I_\lambda, \ \exists\, m \in \mathbb{N}, \ \mid \forall\, n > m, \ \ a_n \in I_\lambda.$$

Vale a dire: *per ogni intorno I_λ del numero λ esiste un intero m tale che per ogni intero $n > m$ si ha $a_n \in I_\lambda$.*

Nella definizione ora data possiamo inserire in (*) lo "storico" *piccolo a piacere*; questo rende la definizione di convergenza più intuitiva, anche se non aggiunge niente di essenziale, stante l'arbitrarietà della scelta dell'intorno. L'elemento a_m della successione oltre al quale si cade sempre nell'intorno scelto dipende in genere dall'intorno stesso.

$\boxed{\text{E}}$ Applicando questa definizione alla successione

$$a_n = \frac{1}{n}$$

si verifica che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Infatti, comunque si prenda un intervallo, anche piccolissimo, contenente lo zero, prima o poi un numero del tipo $1/n$ vi cade dentro, e così pure tutti quelli che lo seguono nella successione considerata. Se invece prendo un numero $\lambda \neq 0$, esiste un suo intorno (un intervallo che lo contiene) che non assorbe tutti i numeri della successione da un certo punto in poi; basta prendere un intervallo aperto abbastanza piccolo da contenere λ ma non lo 0: prima o poi qualche numero del tipo $1/n$, e quindi tutti quelli che lo seguono, cadrà fuori da quest'intorno.

Se non esiste nessun numero λ che soddisfa alla definizione ora data, si dice che la successione non è convergente. Nel caso della non convergenza si possono però avere due situazioni distinte: la successione può essere o **divergente** o **oscillante**.

- *Una successione a_n si dice* **divergente** *a $+\infty$ (o a $-\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad (\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty)$$

se, comunque si scelga un intorno di $+\infty$ (o di $-\infty$), da un certo punto in poi tutti i numeri della successione cadono in quell'intorno.

Come si vede, questa proposizione è formalmente analoga a quella che definisce la convergenza, soltanto che ora si considerano gli intorni di $\pm\infty$ anziché gli intorni di un numero λ. In pratica, essa afferma che una successione è divergente a $+\infty$ quando, comunque si consideri un numero M (intuitivamente, grande a piacere) esso viene superato, da un certo punto in poi, da tutti i numeri della successione. Analogamente per il caso a $-\infty$.

P.es. le successioni

$$a_n = n, \qquad a_n = n^2,$$

sono chiaramente divergenti a $+\infty$.

Se, infine una successione, non è né convergente né divergente, si dice che è **oscillante**. P.es.,

$$a_n = (-1)^n, \qquad a_n = (-n)^3,$$

sono successioni oscillanti. La differenza fra queste due successioni è che la prima è **limitata**, la seconda no. Per questo nuovo concetto passiamo al paragrafo seguente.

La teoria delle successioni numeriche è di grande utilità in matematica. È alla base di molte altre teorie, p.es. della teoria delle "serie numeriche", che vedremo fra poco. Non potendo entrare nei dettagli, facciamo solo un esempio di applicazione.

$\boxed{\text{E}}$ Ritorniamo alla successione iterativa della $\sqrt{c}$, formula (1) di §1.9. Supposto d'aver dimostrato che questa successione è convergente ad un limite λ per ogni scelta di $a_0 \neq 0$, possiamo verificare che è proprio $\lambda = \pm\sqrt{c}$ alla maniera seguente: "applichiamo" ad entrambi i membri della formula (1) l'operazione di limite:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right).$$

Per quel che riguarda il primo membro osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda.$$

Per quel che riguarda invece il secondo membro si può fare intervenire una proprietà fondamentale del calcolo dei limiti (che qui non dimostriamo) secondo la quale l'operazione di limite "filtra" attraverso le operazioni razionali presenti a secondo membro, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n + \frac{c}{\lim_{n\to+\infty} a_n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\lambda + \frac{c}{\lambda}\right).$$

Troviamo allora l'equazione

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left(\lambda + \frac{c}{\lambda}\right),$$

che, sviluppata, diventa $\lambda^2 = c$ e fornisce $\lambda = \pm\sqrt{c}$.

1.14 - Maggioranti/minoranti di un insieme di numeri. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali. Chiamiamo **maggiorante** di A (risp. **minorante** di A) un qualunque numero M tale che $M \geq x$ ($M \leq x$) $\forall x \in A$, cioè un qualunque numero superiore ad ogni numero dell'insieme A. Osserviamo subito che se l'insieme A ammette un maggiorante allora ne ammette infiniti, perché se M è un maggiorante di A, qualunque numero maggiore di M è ancora un maggiorante di A. In questo caso si dice che A è un insieme numerico **limitato superiormente**. Se l'insieme A non ammette maggioranti si dice che è **non limitato** o **illimitato superiormente**. Analoghe considerazioni valgono per i minoranti. Un insieme A limitato inferiormente e superiormente si dice **limitato**. Si noti bene che per stabilire se un insieme è limitato superiormente o inferiormente basta trovare almeno un maggiorante o almeno un minorante. P.es. l'insieme dei reciproci dei numeri naturali (escluso lo zero)

$$A = \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\} \tag{1}$$

è limitato (sia superiormente che inferiormente). Un suo minorante è per esempio 0: tutti i numeri di A sono infatti positivi, quindi maggiori di 0. Un suo maggiorante è per esempio 1: tutti i numeri di A sono ≤ 1. La ricerca di un eventuale maggiorante o minorante non è però sempre così semplice. Prendiamo p.es. l'insieme

$$A = \{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}. \tag{2}$$

È ancora ovvio che è limitato inferiormente (0 è ancora un minorante). È molto meno semplice dimostrare che è anche limitato superiormente (p.es. che 3 è un maggiorante). Un ulteriore esempio interessante è quello dei numeri ottenuti con la formula iterativa (1) di §1.9. È sempre limitato qualunque sia il numero positivo c? La risposta è affermativa, ma la dimostrazione non è immediata.

1.15 - Massimo/minimo di un insieme di numeri. Il **massimo** (risp. **minimo**) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è quel numero che soddisfa a queste due condizioni:

(1) è un maggiorante (risp. minorante) di A,

(2) appartiene ad A.

Lo si denota con $\max(A)$ (risp. $\min(A)$). Si noti bene che per ammettere massimo (o minimo) l'insieme A deve essere limitato superiormente (o inferiormente). Tuttavia, anche se limitato, un insieme può non ammettere massimo o minimo (in altre parole, la limitatezza di un insieme è condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un massimo o minimo). P.es. l'insieme A definito dalla (1), che è limitato, ha come massimo il numero 1 (che è un maggiorante e appartiene all'insieme) ma non ha minimo: non ha nessun minorante che sta in A (infatti $0 \notin A$). Altro esempio: un intervallo limitato $(a, b]$ (aperto a sinistra e chiuso a destra) ha come massimo b e non ha minimo.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare che se un insieme di numeri ammette massimo (o minimo), questo è unico (per cui si usa l'articolo determinativo: "il" massimo, "il" minimo).

1.16 - Estremo superiore/inferiore di un insieme di numeri. L'**estremo superiore** (risp. **inferiore**) di un insieme A è per definizione il minimo dei maggioranti (risp. il massimo dei minoranti). Lo si denota con $\sup(A)$ (risp. $\inf(A)$). Ecco allora che lo zero, nel caso dell'insieme (1), pur non essendo il minimo di A, ne è però l'estremo inferiore. Così come per un intervallo $(a, b]$, l'estremo sinistro a, pur non essendo un minimo, è l'estremo inferiore. La distinzione tra i concetti di massimo (o minimo) e di estremo superiore (o inferiore), per quanto sottile, è di grande importanza. Mentre il massimo o il minimo di un insieme limitato possono non esistere, l'estremo superiore ed inferiore esistono sempre, e sono unici. Si può infatti dimostrare che *un insieme di numeri reali limitato superioremente (risp. inferiormente) ammette estremo superiore (risp. inferiore)*. Questa proprietà si dimostra essere equivalente alla proprietà di completezza dei numeri reali (§1.7). Non è soddisfatta nel campo ristretto dei numeri razionali. Un esempio notevole è il seguente: si dimostra (anche se la dimostrazione, come si è detto, non è semplice) che l'insieme dato dalla formula (2) è limitato superiormente: il suo estremo superiore è il numero di Neper e.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare che l'estremo superiore di un insieme A, definito come minimo dei maggioranti, è quel numero M che soddisfa a queste due proprietà:

$$\begin{array}{l} 1)\ M \geq a,\ \forall\, a \in A, \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A \mid M - \varepsilon < a \leq M. \end{array}$$

Un esempio di applicazione di questi concetti è il seguente teorema sulla **convergenza delle successioni monotòne limitate** (provare a dimostrarlo):

- *una successione a_n crescente e limitata superiormente è convergente ed ha per limite l'estremo superiore dell'insieme dei suoi elementi*:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n\}.$$

Una successione si dice **monotòna**, in particolare **crescente** o **decrescente** se si ha $a_n \leq a_{n+1}$, risp. $a_n \geq a_{n+1}$. Un teorema analogo al precedente vale ovviamente anche nel caso di successioni decrescenti limitate inferiormente: si avrà la convergenza all'estremo inferiore.

1.17 - Serie di numeri. Per "serie" s'intende, genericamente, la "somma di infiniti numeri", più precisamente *la somma degli infiniti numeri di una successione* a_n, somma denotata con

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Una serie tipica è la **serie geometrica** associata alla successione delle potenze di un numero positivo q, che prende il nome di **ragione** della serie,

$$a_n = q^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \tag{1}$$

Un'altra serie notevole è la **somma degli inversi dei fattoriali**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{2}$$

dove per $n!$ (si legge: n fattoriale) s'intende il prodotto di tutti gli interi da 1 a n compreso. Per $n = 0$ si pone per definizione

$$0! = 1.$$

Ma che utilità hanno queste serie e, prima di tutto, che cosa s'intende per "somma infinita", posto che sommare infiniti numeri richiederebbe un tempo infinito? La loro utilità sarà riscontrata nel prossimo capitolo. I matematici intendono per "somma di infiniti numeri" una cosa ben precisa e fattibile:

- *La somma degli infiniti elementi di una successione a_n è il limite S della successione delle* **somme ridotte**

  $$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

  Si pone cioè, per definizione,

  $$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Si noti bene che questo limite potrebbe anche non esistere, ma se esiste ed è finito allora si dice che la serie è **convergente**. Altrimenti si dice che è **divergente** o **oscillante**, a seconda del comportamento della successione delle somme ridotte s_n.

Esempio 1. La serie associata alla successione $a_n = \frac{1}{n}$ dei reciproci dei numeri naturali (escluso lo 0), detta **serie armonica**, malgrado l'apparenza (la successione $\frac{1}{n}$ tende a 0), non è convergente. Per riconoscerlo basta associare gli elementi della somma nel modo seguente

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Si osserva allora che la somma dei termini in ciascuna parentesi è sempre maggiore dell'ultimo termine moltiplicato per il numero dei termini, quindi sempre maggiore di $\frac{1}{2}$. Dunque la somma della serie è maggiore della somma di infiniti $\frac{1}{2}$, e quindi la serie è divergente.

Esempio 2. Consideriamo la serie geometrica di ragione q. Siccome (si ricordi un prodotto notevole)

$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$$

si trova che la somma ridotta n-esima è (supponiamo $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Dal fatto che $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ solo se $|q| < 1$, segue che solamente in questo caso la serie è convergente e la sua somma è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Per esempio, la serie delle potenze di $\frac{1}{2}$, cioè la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, ha per somma 2.

Esempio 3. La serie associata alla successione $\frac{1}{n!}$, le cui somme ridotte sono

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

è convergente. Per dimostrarlo occorre dimostrare (1) che tutte le ridotte formano un insieme numerico limitato superiormente, (2) che la loro successione è crescente. Fatto questo, ma la cosa non è immediata, si applica il teorema del §1.16. La tabella seguente mostra che $n!$ cresce molto rapidamente, quindi che l'inverso decresce molto rapidamente. L'importanza di questa serie sta nel fatto che la sua somma è proprio il numero di Neper e, di cui si è detto.

$e =$

n	$n!$	$\frac{1}{n!}$	s_n
0	1	1	1
1	1	1	2
2	2	0.5	2.5
3	6	0.1666666	2.6666666
4	24	0.0416666	2.7083333
5	120	0.0083666	2.7166666
6	720	0.0013888	2.7180555
7	5040	0.0001984	2.7182539
8	40320	0.0000248	2.7182787
9	362880	0.0000027	2.7182815
10	3628800	0.0000002	$\underline{2.7182818}$

1.18 - Proprietà delle serie. Per lo studio e l'uso delle serie numeriche occorre tener conto di alcuni fatti fondamentali, ed in certi casi anche un po' sorprendenti.

(a) Condizione necessaria (ma non sufficiente, vedi l'Esempio 1 del § precedente) perché una serie converga è che a_n tenda a zero. Però se la successione a_n è a segno alterno (cioè i numeri della successione sono alternativamente positivi e negativi) e $|a_n|$ tende a zero decrescendo, allora la serie è convergente (vedi successivo Esempio 5).

(b) Non valgono in generale la proprietà commutativa e la proprietà associativa, a meno che non si commutino od associno un numero finito di elementi della successione a_n. In altri termini, commutando o associando un numero infinito di elementi della successione a_n il comportamento della serie può mutare: da convergente può diventare divergente, si può far convergere ad un numero fissato arbitrariamente, ecc. (vedi il successivo Esempio 4). La proprietà associativa vale però sempre per le serie convergenti o divergenti, purché si associno elementi contigui.

(c) Una serie si dice **assolutamente convergente** se è convergente la serie dei valori assoluti $|a_n|$. Una serie assolutamente convergente è convergente. Per una serie assolutamente convergente vale la proprietà commutativa.

Esempio 4. La serie associata alla successione $a_n = (-1)^n$, cioè la somma infinita

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

è oscillante; la successione delle ridotte è infatti

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0, \ldots .$$

Se si associano i termini a due a due, si trova la serie

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

che chiaramente ha somma zero. Se invece si associano i termini a due a due, però a partire dal secondo, si trova la serie

$$1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

che invece ha somma 1. Ecco un semplice esempio di come associando in modo diverso i termini di una serie, questa può cambiare carattere: da oscillante può diventare convergente, addirittura a due numeri diversi.

Esempio 5. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

è di termini a segno alterno, i cui valori assoluti però convergono a zero decrescendo. Pertanto è convergente (proprietà (a)). Si dimostra che essa converge a $\frac{\pi}{4}$.

1.19 - Coefficienti binomiali. Ricordiamo le formule che danno il quadrato ed il cubo di un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Queste formule rientrano, come casi particolari $n = 2$ ed $n = 3$, in una formula generale che esprime la potenza n-sima della somma di due numeri, detta appunto **formula del binomio**:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k} \tag{1}$$

In questa formula compaiono i **coefficienti binomiali** definiti da

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}} \tag{2}$$

Di qui si osserva subito la proprietà di **simmetria** di questi simboli:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{3}$$

$\boxed{\text{E}}$ Applicare questa formula generale nei casi $n = 2$, $n = 3$, per ritrovare le formule precedenti. Svilupparla anche per $n = 4$, $n = 5$.

1.20 - Calcolo combinatorio. I coefficienti binomiali sono utilizzati anche in altre applicazioni. Denotiamo con $C_{n,k}$ il numero delle **combinazioni** di n oggetti presi a k a k: esprime in quanti modi possiamo scegliere k oggetti in un insieme di n oggetti distinti. Si dimostra che

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Esempio 1. In quanti modi possiamo scegliere due elementi (p.es. due palline) in un insieme costituito da 4 oggetti (4 palline colorate)? R.:

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

Denotiamo invece con $D_{n,k}$ il numero delle scelte, tenuto conto dell'ordine con cui si scelgono i k oggetti: si chiamano **disposizioni**. Si dimostra che

$$D_{n,k} = k!\,C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Nel caso particolare in cui $k = n$ si chiamano **permutazioni**: il loro numero P_n è dato da

$$P_n = n! \tag{3}$$

Questa formula si ottiene dalla (2) ponendo $k = n$ e $0! = 1$.

Esempio 2. Avendo a disposizione 4 strisce di stoffa colorate quante bandiere a tre strisce si possono formare, usando colori diversi? Conta l'ordine dei colori. R.:

$$D_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 24.$$

In tutti questi casi è sottinteso $k \le n$: il numero degli oggetti da scegliere è minore del numero degli elementi dell'insieme (o, al più, uguale). Possiamo anche considerare il caso in cui si può ripetere la scelta di qualche oggetto. P.es. disporre $n = 3$ simboli $(1, X, 2)$ in $k = 13$ caselle distinte ed ordinate. Se denotiamo allora con $D^r_{n,k}$ il numero delle **disposizioni con ripetizioni** di n oggetti in k posti, si dimostra che

$$D^r_{n,k} = n^k.$$

Nell'esempio considerato è

$$D^r_{3,13} = 3^{13} = 1594323.$$

L'ambiente in cui vengono studiati problemi di questo tipo prende il nome di **calcolo combinatorio**.

***

Esercizi

$\boxed{1}$ Determinare il termine a_{10} ed il limite della successione

$$a_n = \tfrac{n}{2(n+1)}.$$

$\boxed{2}$ Determinarne la somma ridotta per $n = 4$ e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^n .$$

$\boxed{3}$ Determinare, se esistono, massimo, minimo, estremi superiore e inferiore in $\mathbb{R}$ dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A &= (-2, 4] \\ B &= (-1, 3) \\ C &= \{1 - \tfrac{1}{n^2}; \;\; n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Capitolo 2

Le funzioni

2.1 - Funzioni ad una variabile. Una **funzione** è una legge f che associa ad ogni valore di una **variabile indipendente** x, appartenente ad un insieme D di numeri reali detto **dominio** della funzione, un ben determinato numero y (uno solo). La legge

$$y = f(x)$$

che fa passare da x a y (la y viene anche detta **variabile dipendente**) è espressa, nei casi più comuni, con una o più operazioni da eseguirsi sulla x, o a partire dalla x. Vediamo alcuni esempi:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & y = mx + q, \quad m, q \in \mathbb{R}, \\
(2) & y = x^2 \\
(3) & y = \sqrt{x}, \\
(4) & y = \frac{1}{x}, \\
(5) & y = \sqrt{1 - x^2}, \\
(6) & y = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x > 0 \\ 0 & \text{per} \quad x \leq 0, \end{cases} \qquad \text{(funzione "scalino")} \\
(7) & y = \begin{cases} x^2 & \text{per} \quad x > 0 \\ 0 & \text{per} \quad x \leq 0 \end{cases} \\
(8) & y = \sin x \\
(9) & y = \dfrac{\sin x}{x}
\end{array}
$$

Negli esempi (1-5) il calcolo di $f(x)$ si riduce ad operazioni "elementari" note (somme, moltiplicazioni, divisioni, estrazione di radice). Funzioni di questo tipo si dicono **funzioni razionali**, se non intervengono operazioni di radice, **irrazionali** in caso contrario. Tutte le altre funzioni si dicono **trascendenti**. Ne sono un esempio le funzioni (8,9), che fanno intervenire la funzione **seno**, che fa parte della classe delle **funzioni trascendenti elementari** che definiremo più avanti e per il cui calcolo si deve ricorrere a particolari "strumenti" matematici: le **serie di potenze**. Le funzioni (6,7) sono definite "a tratti": le operazioni sono diverse a seconda della scelta di x.

Quando, come in questi esempi, non è esplicitamente dichiarato il dominio D della funzione, s'intende tacitamente che esso comprende <u>tutti</u> i valori della x per cui queste operazioni hanno senso e sono possibili. Questo dominio si chiama **dominio di esistenza** (o **campo di esistenza**) della funzione. Negli esempi considerati il campo di esistenza è:

$$
\begin{aligned}
(1,2,6,7,8) &\quad D = \mathbb{R} \\
(3) &\quad D = [0,+\infty) \\
(4,9) &\quad D = \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\} \\
(5) &\quad D = [-1,1]
\end{aligned}
$$

Osserviamo infatti che le funzioni (3) e (5) coinvolgono l'operazione di estrazione di una radice quadrata di un numero, che può essere effettuata solo quando questo numero è maggiore o al più uguale a zero. Pertanto perché la funzione (3) sia definita deve essere $x \geq 0$, vale a dire $x \in [0,+\infty)$. Analogamente, per la funzione (5) deve essere $1-x^2 \geq 0$, cioè $x \in [-1,1]$. L'operazione definita dalla funzione (4) è sempre effettuabile, salvo nel caso in cui il denominatore è nullo. Vedremo in seguito come $\sin x$ sia definibile per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{!}$ Le funzioni che comunemente si considerano nelle applicazioni sono **definite su intervalli**: il loro campo di esistenza è costituito dall'unione di uno o più intervalli, limitati o illimitati, con estremi inclusi o esclusi. P.es. la funzione $y = \frac{1}{x}$ è definita sull'unione dei due intervalli illimitati aperti $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

$\boxed{!}$ In alcune situazioni particolari una funzione $f(x)$ va considerata in un dominio D_* più **ristretto** del suo vero e più ampio campo di definizione D, $D_* \subset D$. Vanno cioè trascurati tutti i valori della x non appartenenti a D_*. Si dice allora che si considera la **restrizione** della funzione al dominio D_* o la **funzione ristretta** a D_*. Ne vedremo alcuni esempi.

$\boxed{!}$ Le funzioni che ora stiamo considerando si dicono, più precisamente, **funzioni reali** (cioè a valori nei numeri reali) **ad una variabile reale**. Studieremo più avanti anche funzioni a due o più variabili reali. P.es. l'area di un rettangolo di lati x e y è data dalla funzione (a due variabili)

$$f(x,y) = xy.$$

L'area totale di un parallelepipedo (rettangolo) di lati (x,y,z) è data dalla funzione (a tre variabili)

$$f(x,y,z) = 2(xy + yz + zx).$$

2.2 - Rappresentazione grafica delle funzioni. Questa rappresentazione, per quanto talvolta incompleta e approssimativa, è sovente di grande utilità perché permette di percepire "visivamente" le **proprietà qualitative** essenziali della funzione: crescenza, decrescenza, massimi, minimi, ecc. (vedi più avanti). Su di un piano si tracciano due assi (linee rette) fra loro perpendicolari, rappresentanti ciascuno l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, aventi la stessa origine (i due punti rappresentanti lo zero coincidono). Li chiamiamo **assi coordinati** o **assi cartesiani**. Il piano, dotato di questi assi, si chiama **piano cartesiano** o **piano coordinato** (x,y). Di solito uno di questi assi è posto orizzontalmente (rispetto all'osservatore, se il piano è verticale) e orientato verso destra: è l'asse delle x o delle **ascisse**. L'altro, che chiamiamo asse delle y o delle **ordinate**, è di solito orientato verso l'alto. Il piano coordinato (x,y) è suddiviso in quattro **quadranti**, ordinati in senso antiorario a partire dal **primo quadrante** che è quello compreso tra i due semiassi positivi. Siccome ogni asse coordinato rappresenta l'insieme $\mathbb{R}$, il piano coordinato rappresenta il **prodotto cartesiano** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, costituito dalle **coppie ordinate** di numeri reali. Infatti, ad ogni coppia di numeri reali (a, b) corrisponde, in maniera biunivoca, un ben determinato punto P del piano, di coordinate $x = a$ e $y = b$, costruito come in Fig. 2.1. In questa rappresentazione, il punto O intersezione degli assi coordinati corrisponde alla coppia di numeri $(0, 0)$ e prende il nome di **origine** del piano cartesiano.

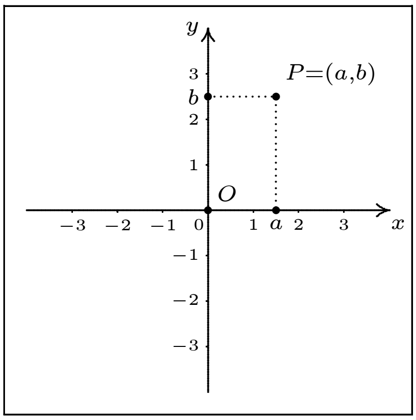


Fig. 2.1 - Coordinate di un punto.

Data allora una funzione $f(x)$, l'insieme di tutti punti corrispondenti a tutte le possibili coppie (x, y) soddisfacenti all'equazione $y = f(x)$ costituisce il **grafico** o **diagramma** della funzione:

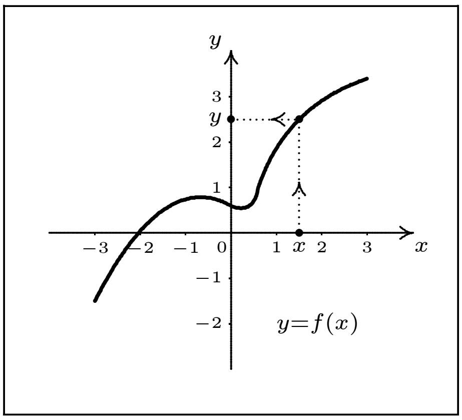


Fig. 2.2 - Il grafico o diagramma di una funzione.

Dal grafico si traggono immediate ed utili indicazioni sul *comportamento* della funzione, come si vedrà in esempi successivi. Il grafico di una funzione permette inoltre di visualizzare il passaggio da un punto del dominio D (sull'asse x) al punto corrispondente $y = f(x)$ (sull'asse y) e quindi, attraverso le scale riportate sugli assi coordinati, di avere una valutazione numerica della funzione.

$\boxed{!}$ La rappresentazione grafica è ovviamente incompleta quando il dominio della funzione non è limitato (per esempio quando $D = \mathbb{R}$) o quando la funzione stessa non è limitata (vedi più avanti). Per certe funzioni, addirittura, la rappresentazione grafica non è possibile. Si tratta di funzioni "patologiche", che possono però avere un interesse teorico, come la funzione seguente, detta **funzione di Dirichlet**:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{per} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Un grafico può essere tracciato in maniera "sommaria", indicativa delle **proprietà qualitative della funzione** (crescenza, decrescenza, massimi, minimi, ecc.). Si chiamerà pertanto **grafico sommario** o **qualitativo**. Lo si può dedurre attraverso un processo di **analisi della funzione**, che utilizza teoremi e regole del **calcolo differenziale** (derivate, limiti, ecc.). Un grafico più preciso si può tracciare partendo da una **tabulazione** della funzione, consistente nella scelta di una successione di valori della x e del calcolo dei corrispondenti valori di $f(x)$ (eseguito in genere da un calcolatore). Si viene così a compilare un **tabulato**, o una **tavola**, della funzione. Per esempio, della semplice funzione $f(x) = x^2$ possiamo considerare la tavola seguente:

x	x^2
0	0
0.1	0.01
0.2	0.04
0.3	0.09
0.4	0.12
0.5	0.25
0.6	0.36
0.7	0.49
0.8	0.64
0.9	0.81

x	x^2
1	1
1.1	1.21
1.2	1.44
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25
1.6	2.56
1.7	2.89
1.8	3.24
1.9	3.61

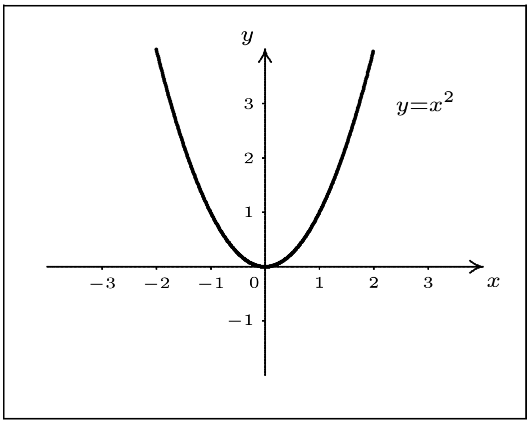


Fig. 2.3 - Tavola e grafico della funzione $f(x) = x^2$.

Ad ogni riga della tavola corrisponde infatti un punto del grafico sul piano cartesiano. Più dettagliata è la tavola, più fitti sono i punti del grafico, che andranno uniti da tratti di "curve interpolanti". In certi casi è sufficiente tabulare la funzione solo in alcune zone del dominio di definizione. Nel caso considerato, per esempio, è sufficiente tabulare la funzione solo per valori positivi della x, essendo $(-x)^2 = x^2$. Talvolta è possibile tracciare il grafico di una funzione sulla base di alcune "informazioni" riguardanti il grafico della funzione o di altre funzioni ad essa collegate. Per esempio, come vedremo, il grafico della funzione "radice quadrata" $f(x) = \sqrt{x}$ si ricava immediatamente da quello di x^2, per $x \geq 0$, scambiando i due assi.

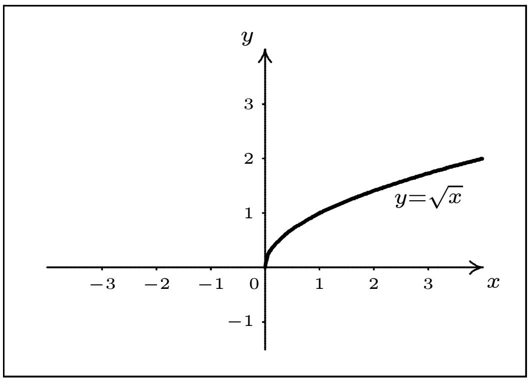


Fig. 2.4 - Grafico della funzione $\sqrt{x}$.

Altro esempio. Per tracciare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, osserviamo che i suoi punti hanno coordinate (x, y) che soddisfano all'equazione

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Siccome da questa, elevando a quadrato ambo i membri, segue l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1,$$

si deduce che il grafico è costituito dai punti che stanno sulla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine, per la precisione solo da quelli che stanno sulla semicirconferenza superiore, essendo la funzione a valori positivi:

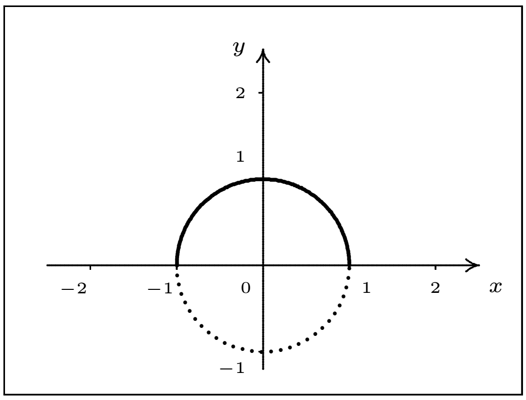


Fig. 2.5 - Grafico della funzione $\sqrt{1 - x^2}$.

Analogamente al caso precedente, il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è costituito dai punti le cui coordinate soddisfano all'equazione $y = \frac{1}{x}$, cioè all'equazione

$$xy = 1.$$

Quest'equazione fornisce un'interpretazione geometrica semplice dei punti del grafico: sono i vertici opposti all'origine dei rettangoli di base x, altezza y e di area 1. Il grafico è quindi costituito dai due rami di un'iperbole equilatera avente come asintoti gli assi coordinati.

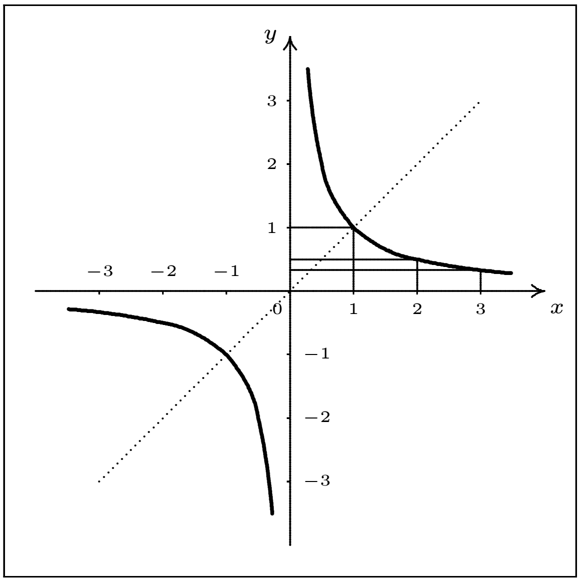


Fig. 2.6 - Grafico della funzione $\frac{1}{x}$.

Vediamo i grafici delle altre funzioni della lista all'inizio del paragrafo. Il grafico di $\sin x$ sarà riconsiderato più avanti.

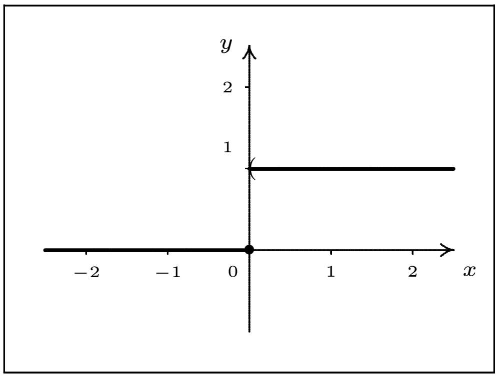


Fig. 2.7 - La funzione "scalino" $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

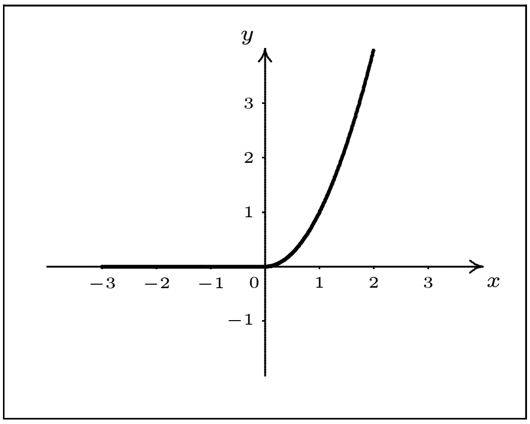


Fig. 2.8 - La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

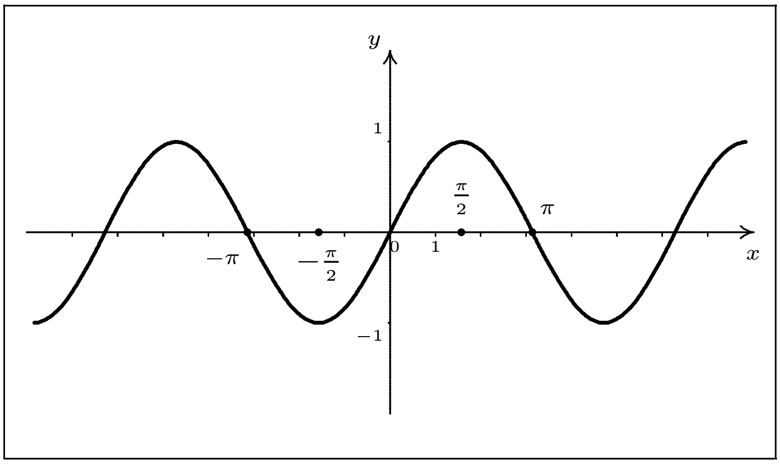


Fig. 2.9 - La funzione $\sin x$.

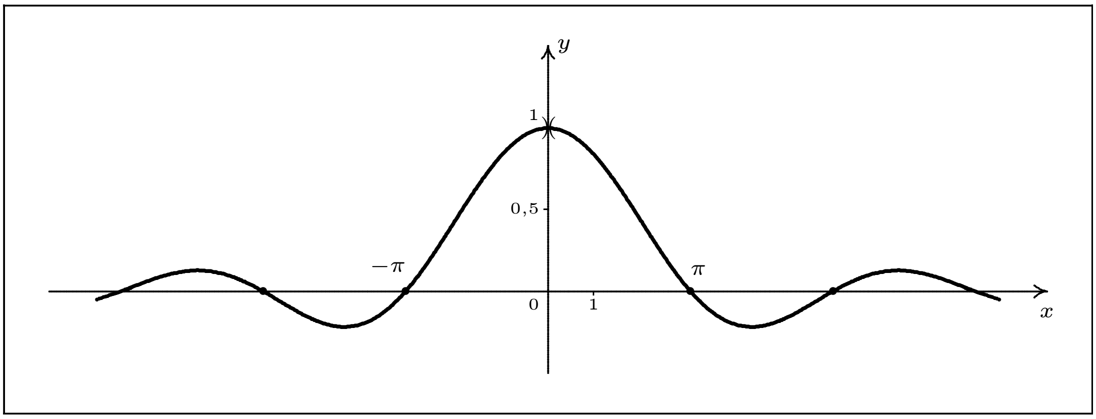
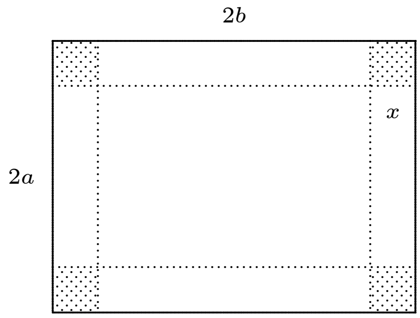


Fig. 2.10 - La funzione $\frac{\sin x}{x}$.

$\boxed{\text{E}}$ **Il problema della scatola**. Consideriamo un primo semplice, ma significativo esempio di applicazione del concetto di "funzione" e dei metodi dell'analisi (si farà un salto in avanti, anticipando la tecnica che utilizza il calcolo delle "derivate"). Dato un foglio rettangolare di cartone, di lati $2a \leq 2b$, si ricava una scatola (senza coperchio) asportandone dagli spigoli i quadrati ombreggiati (di lato x) e ripiegando poi lungo le linee tratteggiate. Vogliamo determinare la lunghezza x (che risulterà essere l'altezza della scatola) per cui la scatola ha volume massimo.



Si calcola innanzitutto il volume della scatola in funzione di x:

$$V(x) = 4(a-x)(b-x)x = 4\,x\,[x^2 - (a+b)x + ab].$$

Lo possiamo quindi rappresentare, per semplicità, nella forma

$$V(x) = 4\,f(x),$$

introdotta la funzione

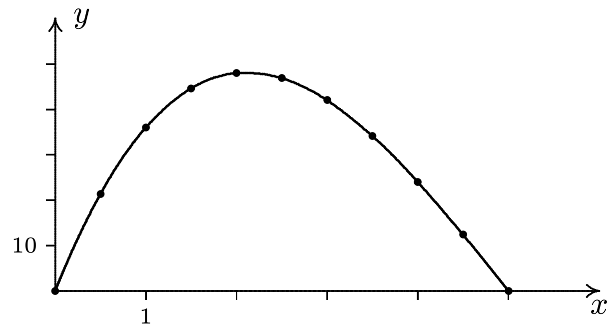
$$f(x) = x\,[x^2 - (a+b)x + ab].$$

Sebbene questa funzione sia definita su tutto $\mathbb{R}$, ha senso considerarla solo per $x \in [0, a]$ (ecco un primo esempio di "restrizione" di una funzione, §2.1). Consideriamo quindi come dominio di definizione della $f(x)$ l'intervallo $[0, a]$.

Metodo empirico. Caso particolare: $a = 5$, $b = 10$. Segue che $f(x) = x(x^2 - 15x + 50)$. Si tabula la funzione $f(x)$, tra i valori $x = 0$ e $x = 5$, una prima volta in maniera grossolana, con passo $0,5$.

x	$f(x)$
0	0
.5	21.375
1	36
1.5	44.625
2	**48**
2.5	46.875
3	42
3.5	34.125
4	24
4.5	12.375
5	0

Si traccia il grafico corrispondente alla tavola, per avere un'idea dell'andamento di $f(x)$:



Dalla tavola si nota un massimo in $x = 2$. Si esamina in una seconda tavola, più raffinata, cosa accade vicino a $x = 2$:

x	$f(x)$
1.7	46.563
1.8	47.232
1.9	47.709
2	48
2.1	**48.111**
2.2	48.048
2.3	47.817
2.4	47.424

Si nota un massimo in $x = 2.1$. Per una migliore approssimazione, si può continuare con tabulati via via più raffinati.

Metodo analitico. Si calcola la derivata di $f(x)$ (vedi Cap. 3):

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+b)x + ab.$$

La si uguaglia a zero, $f'(x) = 0$, ottenendo un'equazione di secondo grado in x,

$$3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0,$$

che produce due radici reali,

$$x_\pm = \tfrac{1}{3}\big(a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 3ab}\big) = \tfrac{1}{3}\big(a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + ab}\big),$$

perché il discriminante è positivo (lo si vede bene dalla sua seconda espressione). Una di queste radici è da scartare perché si trova fuori dal dominio di definizione della $f(x)$. Infatti, siccome sia b che la radice quadrata del discriminante sono $\geq a$, risulta $x_+ \geq \frac{1}{3} 3a = a$. Va dunque scelto il segno $-$:

$$x_- = \tfrac{1}{3}\big(a + b - \sqrt{(a-b)^2 + ab}\big).$$

Questa formula fornisce la *soluzione generale* del problema, per *ogni* scelta di a e b, cioè delle dimensioni del foglio. Nel caso particolare considerato sopra (con $a = 5$ e $b = 10$) risulta

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 50 = 0$$

e

$$x_- = 5\left(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2.1132487,$$

a conferma di quanto trovato col metodo empirico. Si osservi che per un foglio quadrato di lato l, $a = b = l/2$, risulta $x_- = a/3 = l/6$.

2.3 - Funzioni lineari. Di particolare importanza sono le funzioni del tipo

$$f(x) = mx + q, \qquad m, q \in \mathbb{R}$$

il cui grafico è una **retta**. La costante m si chiama **coefficiente angolare** (o **inclinazione**) della retta: è il rapporto delle differenze delle ordinate e delle ascisse di due punti distinti qualsiasi della retta $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$:

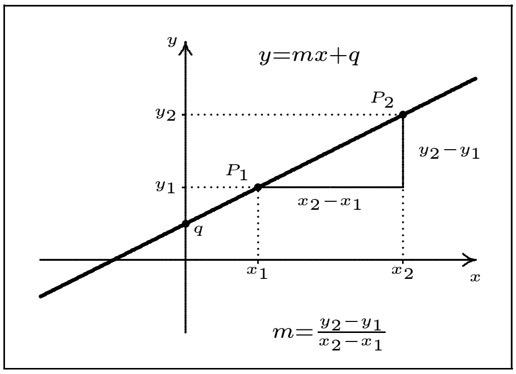


Fig. 2.11 - Il coefficiente angolare di una retta, I.

Infatti, dovendo essere

$$\begin{cases} y_1 = m\,x_1 + q, \\ y_2 = m\,x_2 + q, \end{cases}$$

sottraendo membro a membro si trova

$$y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

e quindi

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Se consideriamo il caso in cui le ascisse dei due punti differiscono di 1, $x_2 - x_1 = 1$, risulta $m = y_2 - y_1$. In altri termini: un triangolo rettangolo con ipotenusa sulla retta e base unitaria ($= 1$) ha altezza m (considerata con segno).

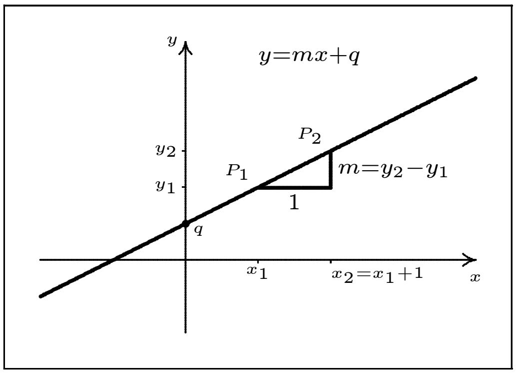


Fig. 2.12 - Il coefficiente angolare di una retta, II.

La costante q prende il nome di **intercetta**: esso rappresenta l'ordinata del punto intersezione della retta con l'asse delle y (che corrisponde, appunto, a $x = 0$). Quando $q = 0$, la retta passa per l'origine:

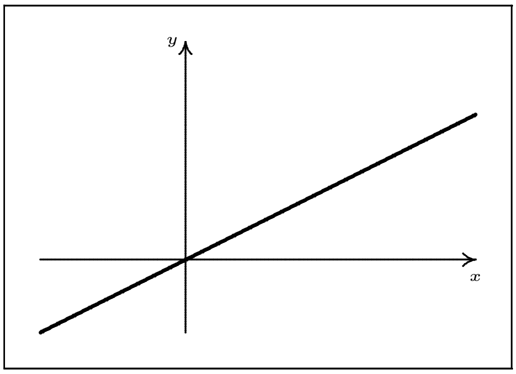


Fig. 2.13 - Grafico di $f(x) = mx$.

Si osservi che i grafici tracciati corrispondono al caso $m > 0$, cioè al caso in cui la funzione è "crescente" (vedi § 2.5). Se $m < 0$ la funzione è "decrescente". Il caso $m = 0$ corrisponde alla **funzione costante** $f(x) = q$ il cui grafico è una retta orizzontale (parallela all'asse y).

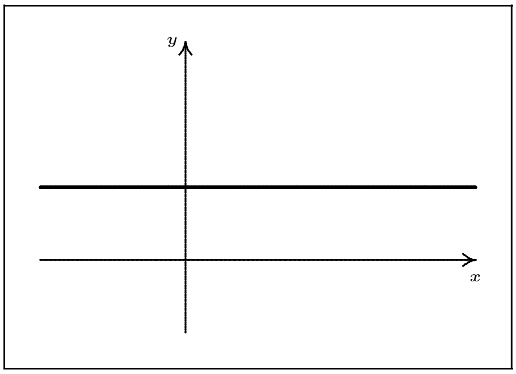


Fig. 2.14 - Grafico di $f(x) = q = \text{cost.}$

Il caso $m = 1$ corrisponde invece alla **funzione identica** $f(x) = x$, che fa corrispondere ad ogni numero x lo stesso numero. Il suo grafico è la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Per quanto possa sembrare una funzione "banale", essa ha, come vedremo, un certo interesse.

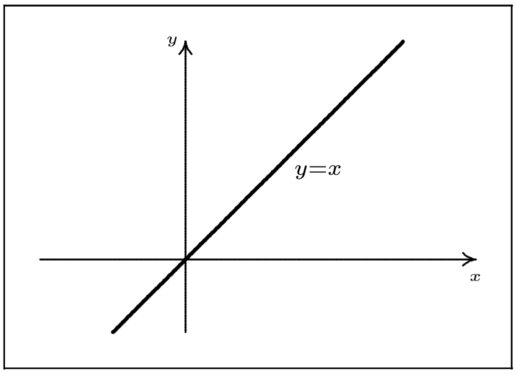


Fig. 2.15 - Grafico di $f(x) = x$.

2.4 - Le potenze. Sono le funzioni del tipo

$$x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \qquad (n \quad \text{fattori}).$$

Se n è pari il grafico ha un andamento simile a quello di x^2. Al crescere di n si "schiaccia" sempre di più sull'asse x intorno all'origine, nell'intervallo $(-1, 1)$, e si innalza più rapidamente all'esterno di questo, passando sempre per i punti $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. Tutte le potenze pari hanno un minimo per $x = 0$ (vedi §2.10).

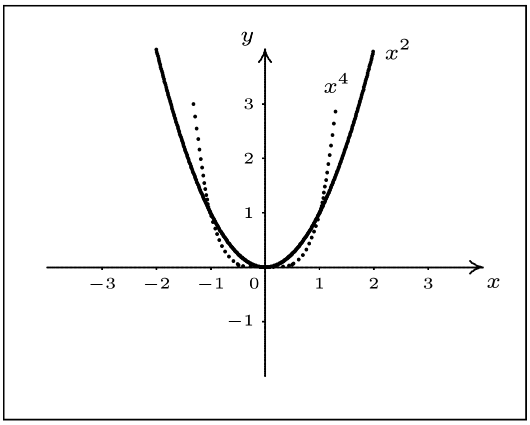


Fig. 2.16 - Grafico delle potenze x^2 e x^4.

Per n dispari (maggiore di 1) l'andamento del grafico è simile a quello del caso pari per $x > 0$ (nel primo quadrante) ma è "rovesciato" per $x < 0$, cioè simmetrico rispetto all'origine. Le potenze dispari hanno un flesso orizzontale (vedi §4.4) in $x = 0$.

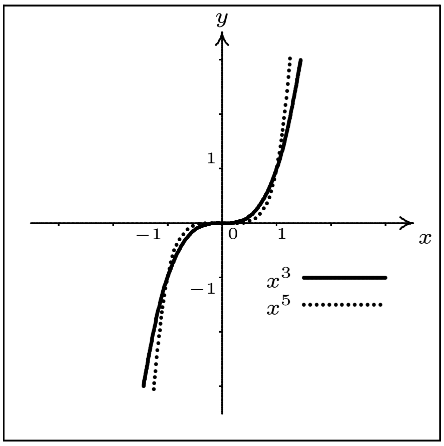


Fig. 2.17 - Grafico delle potenze x^3 e x^5.

2.5 - I polinomi. Un **polinomio** è una combinazione lineare di potenze:

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots + a_n\,x^n, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

I numeri $a_0, \ldots, a_n$ sono detti **coefficienti** del polinomio. La potenza massima n che compare è il **grado** del polinomio. L'andamento del grafico di un polinomio è molto vario, a seconda del valore e del segno dei coefficienti. Il caso $n = 1$ corrisponde alle rette. Interessante è anche il caso $n = 2$: il grafico di un polinomio di grado 2, cioè di una funzione del tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

è una **parabola** (se $a \neq 0$) con asse parallelo all'asse y.

$\boxed{\text{E}}$ Osservare come variano le "caratteristiche" di questa parabola (concavità, vertice, intersezioni con gli assi coordinati) al variare dei coefficienti (a, b, c).

$\boxed{!}$ Come vedremo, i polinomi svolgono un ruolo fondamentale nella tabulazione delle funzioni e nei metodi di interpolazione. Questo perché *i polinomi si possono tabulare con le sole operazioni di somma e prodotto* e sono pertanto le uniche funzioni (insieme a quelle razionali, vedi § seguente) che un calcolatore (uomo compreso) può manipolare.

2.6 - Le funzioni razionali. Sono le funzioni esprimibili mediante frazioni di polinomi:

$$f(x) = \frac{N_n(x)}{D_d(x)}. \tag{1}$$

Se il grado n del polinomio a numeratore è maggiore del grado d del polinomio a denominatore, si può eseguire la divisione, la quale fornirà un polinomio quoziente $Q_{n-d}(x)$ (di grado $q = n - d$) ed un resto $R_r(x)$ di grado $r < d$. Una funzione razionale si riduce quindi sempre ad una funzione del tipo

$$f(x) = Q_q(x) + \frac{R_r(x)}{D_d(x)}, \qquad r < d. \tag{2}$$

$\boxed{\text{E}}$ La divisione fra polinomi si esegue con un algoritmo simile alla quello della divisione fra numeri interi (la regola di Ruffini può essere evitata). Fare qualche esercizio.

2.7 - Funzioni crescenti/decrescenti. Una funzione è **crescente** *in un intervallo* I se per ogni coppia di punti $x_1 < x_2$ di I si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se vale sempre la disuguaglianza stretta $f(x_1) < f(x_2)$ per ogni $x_1 < x_2$, la funzione si dice **strettamente crescente**. Analoga definizione per una funzione decrescente. Una funzione crescente o decrescente si dice **monotóna**. Esempi: la funzione lineare è crescente per $m > 0$, decrescente per $m < 0$; le potenze pari $y = x^{2n}$ sono strettamente decrescenti in $(-\infty, 0)$, crescenti in $(0, +\infty)$; quelle dispari, $y = x^{2n+1}$, sono strettamente crescenti.

2.8 - Funzioni pari/dispari. Una funzione è **pari** se per ogni $x \in D$ si ha ancora $-x \in D$ e inoltre

$$f(-x) = f(x).$$

Le funzioni pari hanno grafico simmetrico rispetto all'asse y. Una funzione è **dispari** se per ogni $x \in D$ si ha $-x \in D$ e

$$f(-x) = -f(x).$$

Le funzioni dispari hanno grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi. Esempi: le potenze x^n sono funzioni pari se n è pari, funzioni dispari se n è dispari.

2.9 - Funzioni limitate/illimitate. L'**immagine** di una funzione $f(x)$ è l'insieme numerico di tutti i valori assunti quando x percorre <u>tutti</u> i possibili valori del dominio D. Denotiamo quest'insieme con $f(D)$. Lo si "visualizza" proiettando il grafico della funzione sull'asse delle ordinate y. Una funzione si dice **limitata** oppure **illimitata** a seconda che la sua immagine $f(D)$ sia un insieme numerico limitato o illimitato (superiormente, inferiormente), vedi §1.15. Diciamo cioè, più precisamente, che una funzione è **limitata superiormente** se esiste un numero S mai superato da tutti i possibili valori della funzione,

$$\exists S \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq S, \quad \forall x \in D. \tag{$*$}$$

Se invece questa condizione non è verificata, se cioè, comunque si fissi un numero S esiste almeno un $x \in D$ dove $f(x)$ assume valori superiori a S, allora la funzione è **illimitata** (o non-limitata) **superiormente**. Analoghe definizioni si hanno nel caso inferiore. Esempi: le potenze pari sono limitate inferiormente e illimitate superiormente, mentre quelle dispari sono illimitate, sia superiormente che inferiormente.

2.10 - Estremi superiori/inferiori, massimi/minimi. Un numero S che soddisfa alla $(*)$ prende il nome di **confine superiore** o **maggiorante** della funzione. Se la funzione ammette un maggiorante S, col che è limitata superiormente, ne ammette ovviamente infiniti altri: basta aggiungere ad S un qualunque numero positivo. Ma tra questi infiniti maggioranti ne esiste sicuramente uno, denotiamolo con S_*, che ha questa proprietà: vale sempre la disuguaglianza

$$f(x) \leq S_*, \quad \forall x \in D, \tag{$**$}$$

ma comunque si prenda un numero (anche di "pochissimo") inferiore a S_*, che possiamo denotare con $S_* - \varepsilon$, allora esistono dei punti $x \in D$ dove $f(x)$ supera questo numero:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in D \mid f(x) > S_* - \varepsilon. \tag{$***$}$$

Questo numero S_* prende il nome di **estremo superiore** della funzione f e si denota con $\sup(f)$; si pone cioè $\sup(f) = S_*$. Si dimostra che la sua esistenza è conseguenza della fondamentale proprietà di completezza dei numeri reali. Analoghe considerazioni portano alla definizione di **estremo inferiore** di una funzione f limitata inferiormente, denotato con $\inf(f)$: è quel numero s_* (esistente se la funzione è limitata inferiormente) che soddisfa alle due condizioni

$$\begin{cases} \forall\, x \in D, \quad f(x) \geq s_*, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in D \mid f(x) < s_* + \varepsilon. \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

Prima di vedere qualche esempio occorre fare una sottile, ma importante e necessaria, distinzione. Non è detto che l'estremo superiore venga "raggiunto", cioè che esista un qualche $x_* \in D$ dove la funzione assume il valore S_*: $f(x_*) = S_* = \sup(f)$ (è cioè soddisfatta l'uguaglianza nella ($**$)). Se questo invece accade si dice che S_* è il **valore massimo** o **massimo** della funzione e che x_* è **punto di massimo** della funzione. Ripetiamo: se l'estremo superiore viene raggiunto, allora si dice **massimo** (analogamente per la definizione di minimo). Il massimo e minimo di una funzione, che se esistono sono unici, si dicono anche **massimo/minimo globale** o **assoluto**) della funzione, quando si mettono in relazione con eventuali massimi/minimi "locali" (o "relativi"), definiti nel § seguente.

Esempi. (1) Nel dominio $D = (0, +\infty)$ la funzione $\frac{1}{x}$ è illimitata superiormente, limitata inferiormente e ha estremo inferiore 0 (non minimo!). (2) La funzione $y = x^2$ è limitata inferiormente e illimitata superiormente; ha minimo uguale a 0, con (unico) punto di minimo $x = 0$ (lo stesso dicasi per ogni potenza pari). (3) La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è limitata superiormente (anche inferiormente) ed ha estremo superiore 1, che però non è massimo (in $x = 0$ la funzione non è definita). (4) La funzione $\sin x$ ha valore massimo 1 e minimo -1, ma ha infiniti punti di massimo e minimo.

Ancora una osservazione sulle notazioni: per indicare che una funzione $f(x)$ è illimitata superiormente o inferiormente si usa anche scrivere, rispettivamente,

$$\sup(f) = +\infty, \qquad \inf(f) = -\infty.$$

2.11 - Massimi/minimi locali. Data una funzione $y = f(x)$ di dominio D, un **punto** $x_* \in D$ si dice **di massimo locale** (risp. **minimo locale**) se esiste un intorno $I \subseteq D$ contenente x_* dove la funzione assume valori più piccoli (risp. più grandi) di $f(x_*)$:

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_*) \qquad (\text{risp. } f(x) \geq f(x_*)).$$

Il massimo (o minimo) locale si dice **stretto** o **proprio** se queste disuguaglianze valgono in senso stretto, eccetto che per $x = x_*$.

Esempio. La funzione di Fig. 2.18 (che, come accenna il grafico, non è limitata inferiormente) non ha minimo (globale, o assoluto) ma ha un minimo locale in x_2. Ha due massimi locali in x_1 e x_3. Uno di questi, x_1, è anche punto di massimo (globale, o assoluto).

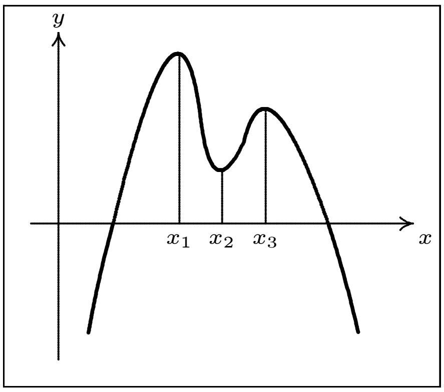


Fig. 2.18: Massimi/minimi locali e globali.

Altro esempio. La funzione di Fig. 2.8 (esempio (7) di §2.1) ha infiniti punti di minimo locale, non in senso stretto: sono tutti i punti sul semiasse negativo delle x.

2.12 - Zeri. Si dice che una funzione $f(x)$ ha uno **zero** in un punto $x_* \in D$ se in quel punto si annulla: $f(x_*) = 0$. Gli **zeri** di una funzione sono quindi rappresentati dalle intersezioni del grafico con l'asse delle x. Gli zeri di una funzione si determinano risolvendo l'equazione

$$f(x) = 0.$$

Occorrerà distinguere tra **zero semplice**, quando la tangente al grafico nello zero non è orizzontale, non coincide cioè con l'asse x (come accade p.es. negli zeri della figura precedente o degli zeri di $\sin x$) e **zero multiplo**, quando invece la tangente è orizzontale (come accade p.es. per lo zero delle potenze x^n, sia pari che dispari). Ma su questo si ritornerà più avanti (§4.13).

$\boxed{!}$ Se la funzione $f(x)$ è un **polinomio** di grado n, allora i suoi zeri sono le radici reali dell'**equazione algebrica** associata:

$$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0.$$

$\boxed{\text{E}}$ Discutere l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ attraverso il grafico $y = ax^2 + bx + c$.

2.13 - Funzioni traslate. Data una funzione $f(x)$ e fissato un qualunque numero p, possiamo considerare la funzione

$$g(x) = f(x - p).$$

Il grafico di questa nuova funzione $g(x)$, rispetto a quello della $f(x)$, risulta essere traslato di una lunghezza $|p|$ parallelamente all'asse x, a destra se $p > 0$, a sinistra se $p < 0$.

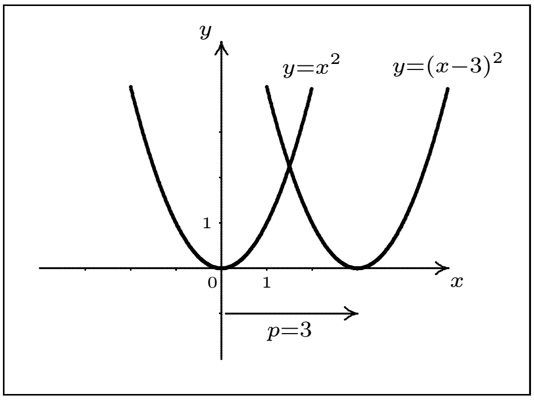


Fig. 2.19 - Parabola traslata a destra: $p = 3$.

Se invece si somma ad una funzione $f(x)$ un numero p, il grafico della nuova funzione

$$g(x) = f(x) + p$$

è, rispetto a quello della $f(x)$, traslato verticalmente di una lunghezza $|p|$, verso l'alto se $p > 0$, verso il basso se $p < 0$.

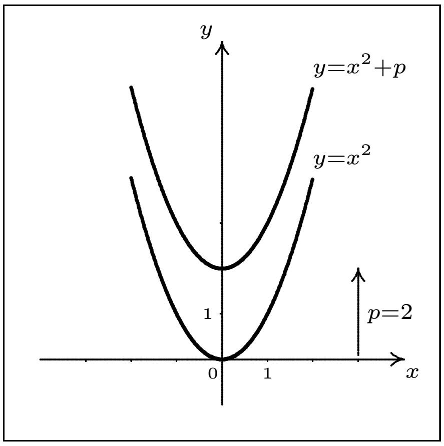


Fig. 2.20 - Parabola traslata in alto: $p = 2$.

2.14 - Funzioni periodiche. Una funzione $f(x)$ si dice **periodica** se esiste un numero $p > 0$ tale che

$$f(x + p) = f(x). \tag{†}$$

Si osservi che questa condizione implica anche

$$f(x + np) = f(x) \tag{‡}$$

per ogni numero intero n (positivo o negativo). Infatti, $f(x + 2p) = f(x + p + p) = f(x+p) = f(x)$, $f(x) = f(x-p+p) = f(x-p)$, ecc. Se non esiste nessun altro numero positivo inferiore a p per cui vale la (†), allora p prende il nome di **periodo** di $f(x)$. Il grafico di una funzione periodica si sovrappone a se stesso dopo una traslazione, a destra o a sinistra, di ampiezza p.

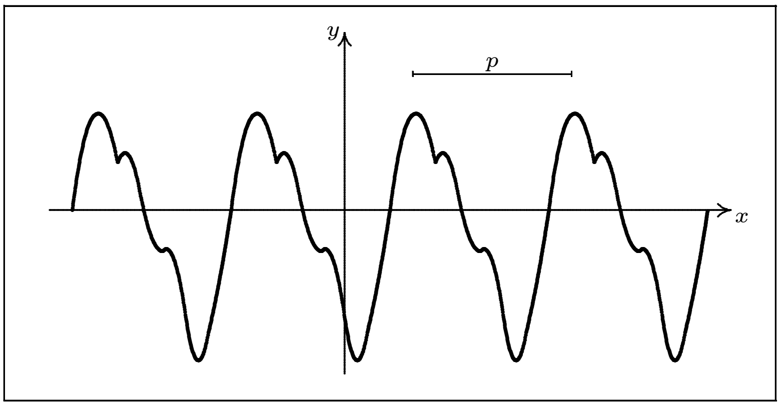


Fig. 2.21 - Funzione periodica di periodo p.

2.15 - Le funzioni circolari o trigonometriche. Funzioni periodiche "fondamentali" (nel senso che preciseremo più avanti) sono le **funzioni circolari** o **trigonometriche**

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x,$$

dette rispettivamente **seno**, **coseno**, **tangente**. Esse sono definite per via geometrica alla maniera seguente (esiste anche una definizione puramente "analitica", che prescinde da ogni concetto geometrico; la vederemo più avanti). Si considera una circonferenza di raggio 1 e centro C; si fissano due assi orientati ortogonali (X, Y) centrati in C; denotato con O il punto intersezione con il semiasse positivo X, si percorre la circonferenza in senso antiorario per una lunghezza x, determinando così un punto P.

$\boxed{!}$ Si noti che la x rappresenta in **radianti** la misura dell'angolo $O\widehat{C}P$.

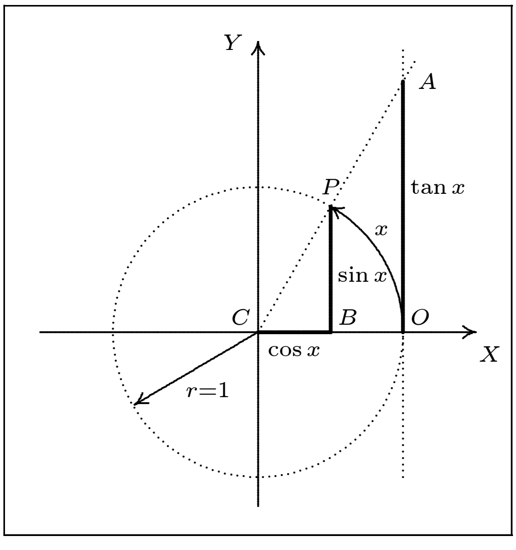


Fig. 2.22 - Definizione geometrica delle funzioni circolari.

La retta CP interseca in un punto A la tangente in O alla circonferenza. Si considera inoltre il punto B proiezione di P sull'asse X. Denotate con (X_P, Y_P) le coordinate del punto P, poniamo per definizione

$$Y_P = \sin x, \qquad X_P = \cos x.$$

Detta inoltre Y_A l'ordinata del punto A (la sua ascissa vale sempre 1), poniamo

$$Y_A = \tan x.$$

Si ottengono così tre funzioni della variabile x, chiamate rispettivamente **seno**, **coseno** e **tangente**. Dalla figura osserviamo che i triangoli rettangoli CBP e COA sono simili (il secondo ha base 1) e quindi che la tangente risulta definibile anche come rapporto tra seno e coseno:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{†}$$

Inoltre, siccome il traingolo rettangolo CBP ha ipotenusa unitaria ($= 1$), vale tra seno e coseno la fondamentale relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{‡}$$

Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π. Infatti se a x si aggiunge 2π, il che corrisponde ad aggiungere a P un giro completo della circonferenza (che ha appunto lunghezza 2π), ci si ritrova ancora nello stesso punto P. Basta quindi considerarne il grafico in un intervallo di ampiezza 2π, p.es. quello centrato nell'origine:

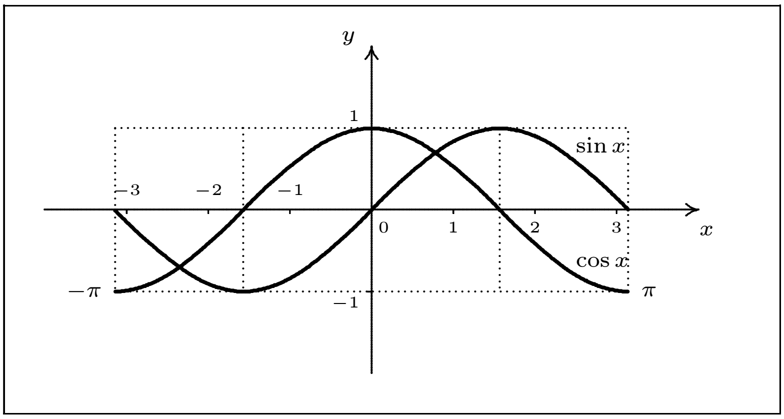


Fig. 2.23 - Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

Se invece si percorre la circonferenza in senso contrario (orario), il che corrisponde a cambiare segno alla x, si osserva che il seno cambia di segno, mentre il coseno resta invariato:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x.$$

Dunque il seno è una funzione dispari, mentre il coseno è pari. Dalla (†) si vede che anche la tangente è dispari, ma, mentre il seno ed il coseno sono funzioni definite per ogni x (quindi il loro dominio è tutto $\mathbb{R}$), la tangente non è definita nei punti in cui si annulla il coseno, cioè nei punti del tipo

$$x = (2n+1)\,\tfrac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre anche la tangente è periodica, ma il suo periodo è π (la metà del periodo di seno e coseno). Questo perché aggiungendo π al seno e coseno, aggiungendo cioè mezzo giro a P, ci si trova nel punto opposto a P, dove seno e coseno cambiano entrambe di segno, ma dove il loro rapporto (la tangente) resta invariato.

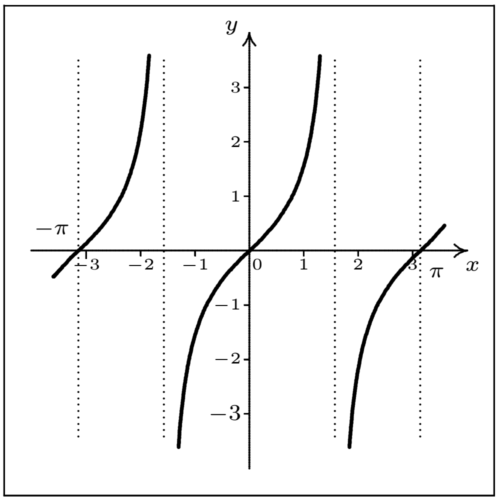


Fig. 2.24 - La funzione $\tan x$.

2.16 - Formule di trigonometria. Le funzioni circolari trovano una prima importante applicazione in **trigonometria**, che tratta metodi di calcolo di lunghezze e di angoli, di vasta portata pratica.

$\boxed{\text{E}}$ **La misura dell'altezza di una torre**. L'altezza h di una torre rispetto al suolo può essere calcolata, nell'ipotesi che il suolo sia pianeggiante (orizzontale), fissando un punto P sul suolo, misurando la sua distanza b dal punto B, piede sul suolo della perpendicolare passante per il vertice V della torre, e l'angolo α formato dalla retta PV col suolo (retta PB). Si applica la semplice formula

$$h = b \tan \alpha.$$

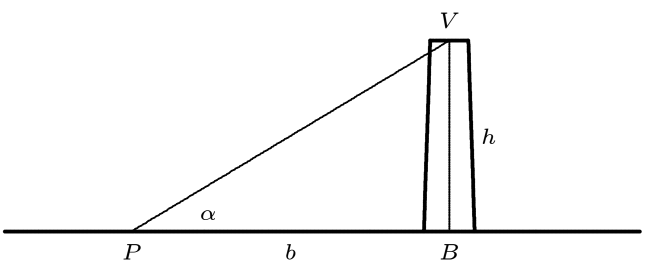


Fig. 2.25 - Misura dell'altezza di una torre.

$\boxed{\text{E}}$ **La triangolazione**. Sempre nel caso di un suolo pianeggiante, da un punto A si vuole misurare la distanza c che lo separa da un altro punto B inaccessibile: i due punti sono per esempio separati da un fiume. Si fissa allora un altro punto C dalla stessa parte di A, si misurano la distanza $b = |AC|$ e gli angoli $\alpha = B\widehat{A}C$ e $\gamma = A\widehat{C}B$. Con questi tre elementi posso calcolare la distanza $c = |AB|$. Come?

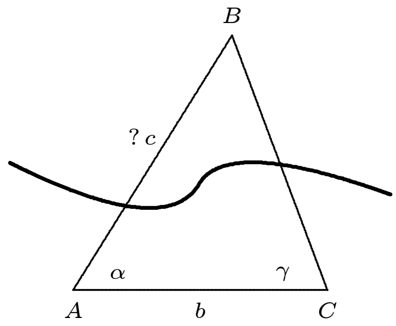


Fig. 2.26 - La triangolazione.

Consideriamo il triangolo ABC e la sua altezza h rispetto alla base AC:

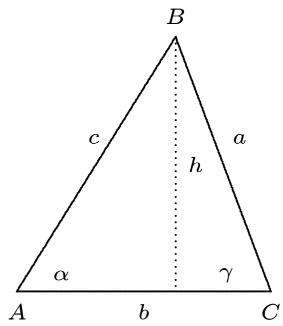


Fig. 2.26'.

Osserviamo subito che valgono le due equazioni:

$$\begin{cases} a\,\cos\gamma + c\,\cos\alpha = b, \\ a\,\sin\gamma = c\,\sin\alpha \quad (=h). \end{cases}$$

Queste formano un sistema di due equazioni lineari nelle incognite (a, c):

$$\begin{cases} a\,\cos\gamma + c\,\cos\alpha = b, \\ a\,\sin\gamma - c\,\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Con la regola di Cramer possiamo ricavare c:

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \cos\gamma & b \\ \sin\gamma & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \sin\gamma & -\sin\alpha \end{vmatrix}} = \frac{b\,\sin\gamma}{\cos\gamma\,\sin\alpha + \sin\gamma\,\cos\alpha},$$

quindi, per la formula di somma (vedi avanti):

$$c = b\,\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Con questa formula generale, calcolati i seni degli angoli α e $\alpha+\gamma$, che insieme a b sono noti, si può calcolare c.

E **Il teorema di Carnot**. Il teorema (o formula) di Carnot estende ad un triangolo qualunque il teorema di Pitagora: si può calcolare la lunghezza di un lato c di un triangolo (qualunque) conoscendo la lunghezza degli altri due lati (a, b) e l'angolo γ compreso tra questi, più precisamente il coseno di quest'angolo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

I testi di trigonometria riportano varie altre formule. Ricordiamo le principali.

Formule di addizione:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \\ &\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y \\ &\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y} \end{aligned}}$$

Formule di duplicazione e **di bisezione**:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin 2x = 2\ \sin x\ \cos x \\ &\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &\tan 2x = \frac{2\ \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\sin^2 \tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x) \\ &\cos^2 \tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos x) \\ &\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \end{aligned}}$$

Formule di prostaferesi (trasformano somme in prodotti):

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin x \pm \sin y = 2\ \sin \frac{x \pm y}{2}\ \cos \frac{x \mp y}{2} \\ &\cos x + \cos y = 2\ \cos \frac{x+y}{2}\ \cos \frac{x-y}{2} \\ &\cos x - \cos y = \ -2\ \sin \frac{x+y}{2}\ \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}}$$

Formule parametriche (esprimono seno e coseno, e quindi la tangente, come funzioni della tangente dell'angolo metà):

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ &\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \qquad t = \tan \tfrac{x}{2}}$$

Vengono talvolta usate anche le funzioni circolari "reciproche", **secante**, **cosecante** e **cotangente**, definite rispettivamente da

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}.}$$

2.17 - Serie di potenze. Come si possono calcolare (quindi "tabulare") le funzioni circolari? Con uno strumento semplice ma molto potente, che si applica anche per il calcolo di altre funzioni: le **serie di potenze**. Una serie di potenze è una "somma infinita" di potenze (intere positive) della x del tipo

$$S(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\,x^p,$$

dove $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ è una data successione di numeri reali, detti **coefficienti** della serie. Ma che senso ha sommare un numero infinito di funzioni? (nel nostro caso si tratta delle funzioni del tipo $a_n\,x^n$). Si dà una definizione di quest'operazione analoga a quella di somma infinita di una successione di numeri (vedi §1.17). Infatti, per ogni fissato valore della x una serie di funzioni si trasforma in una serie di numeri. In pratica, tuttavia, una serie di potenze viene sempre "troncata" ad un certo punto, cioè ad un termine $a_n\,x^n$ opportuno, riducendosi così ad un polinomio di grado n,

$$S(x) \simeq P_n(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots + a_n\,x^n,$$

il cui significato è ovvio ed il cui calcolo richiede, per ogni x, le sole operazioni di somma e prodotto. Ma che errore si commette con un tale taglio? Qual'è cioè la differenza, in valore assoluto, tra $S(x)$ e $P_n(x)$? In genere (ma non è sempre così) l'errore è tanto più piccolo quanto più grande è n (il grado del polinomio) e quanto più piccola è la distanza di x da un certo punto prefissato x_0. Per dare però una risposta precisa a queste domande occorre un altro strumento, fondamentale anche per la stessa teoria delle serie di potenze, che vedremo più avanti: la **formula di Taylor**.

Con questa potentissima formula si dimostra, per esempio, che il seno ed il coseno sono calcolabili con le serie seguenti:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Si noti che la serie del seno ha potenze solo dispari (infatti il seno è una funzione dispari), mentre quella del coseno ha potenze solo pari (infatti il coseno è pari).

$\boxed{\text{L}}$ Tracciare il grafico dei polinomi ottenuti troncando le due serie precedenti ed osservare come, al crescere del grado, essi si "appoggino" sempre di più ai grafici di seno e coseno (almeno per piccoli valori della x).

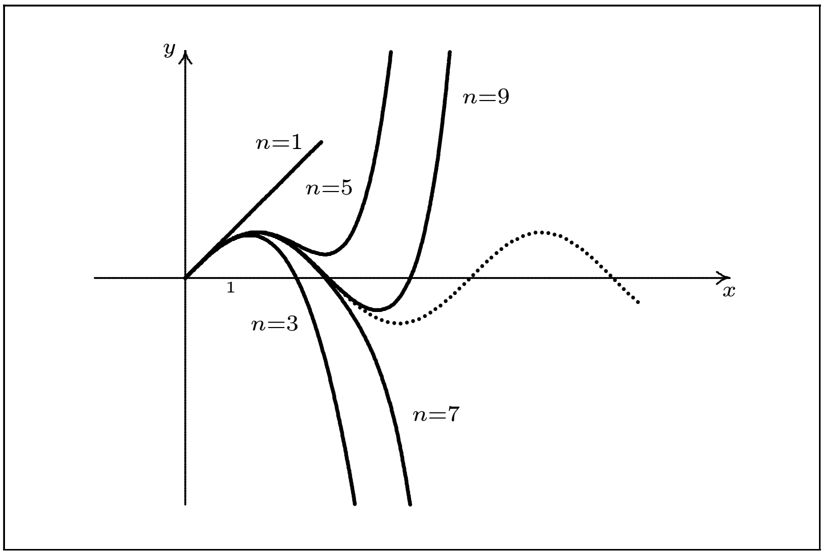


Fig. 2.27 - Approssimazione di $\sin x$ con i polinomi ridotti della serie.

2.18 - Funzioni composte. Siano date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$. Esse, secondo la definizione generale di funzione, rappresentano delle operazioni eseguibili sulla variabile numerica x. Supponiamo di eseguire prima l'operazione $f(x)$ e quindi, sul risultato così ottenuto, di operare con la g. Si ottiene una terza funzione

$$g\big(f(x)\big)$$

che si chiama **funzione composta** di f e di g (nell'ordine!). La si denota, sinteticamente, con $g \circ f$. P.es. siano

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

La funzione composta $g \circ f$ è data da

$$g \circ f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

Invece, la funzione composta in ordine inverso $f \circ g$ è data da

$$f \circ g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

2.19 - Funzioni inverse. Con riferimento a quanto detto nel paragrafo precedente, si considerino per esempio le due funzioni

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

La prima alla x associa il suo quadrato, la seconda la radice quadrata. La seconda è definita solo per $x \geq 0$. Si tratta di due operazioni <u>una</u> <u>inversa</u> <u>dell'altra</u>, nel senso che applicando successivamente l'una e poi l'altra si ritorna al valore originario della x. In altri termini, la composizione delle due funzioni, in entrambi gli ordini, $g \circ f$ e $f \circ g$, si riduce alla funzione identica, che ad ogni numero x fa corrispondere ancora lo stesso numero x:

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2} = x, \qquad f\big(g(x)\big) = (\sqrt{x})^2 = x,$$

cioè

$$g \circ f(x) = x, \qquad f \circ g(x) = x. \tag{1}$$

Se consideriamo simultaneamente i grafici delle due funzioni suddette osserviamo che essi sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo quadrante del piamo coordinato, che è il grafico della funzione identica $y = x$.

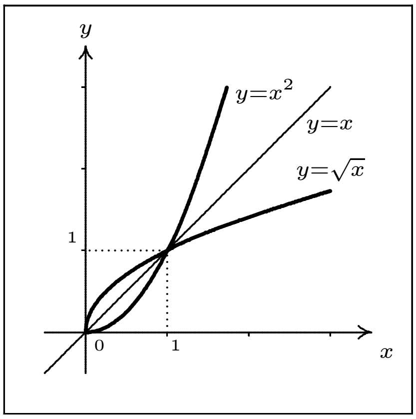


Fig. 2.28 - Le funzioni inverse x^2 e $\sqrt{x}$.

Quest'esempio non è che un caso particolare del seguente fatto generale: se due funzioni f e g soddisfano alla condizione (1), cioè se la loro composizione coincide con la funzione identica, allora si dice che sono **funzioni inverse**, ovvero che f è la funzione inversa della g o che la g è la funzione inversa della f.

Diciamo che una funzione $f(x)$ è **invertibile** se ammette una funzione inversa. Questa funzione inversa si denota convenzionalmente con $f^{-1}(x)$ (attenzione! si tratta di un puro simbolo; non è la funzione $1/f(x)$): ad esempio, se $f(x) = x^2$ allora $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Come è mostrato nel prossimo §, per essere invertibile una funzione deve essere <u>iniettiva</u>. Come vedremo, questa iniettività o invertibilità si ottiene, in certi casi, restringendo opportunamente il dominio di definizione della funzione $f(x)$.

Siccome la (1) si traduce anche nell'equivalenza

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g(y) = x,$$

si osserva che i grafici delle due funzioni rimangono invariati scambiando l'asse x con l'asse y. Un tale scambio equivale a "rivoltare" il piano coordinato intorno alla bisettrice del primo (e terzo) quadrante. Dunque:

- *due funzioni inverse $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ hanno grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.*

$\boxed{!}$ Ci sono funzioni che sono uguali alle proprie inverse (cioè tali che il loro grafico è simmetrico rispetto alla suddetta bisettrice). Ad esempio:

$$f(x) = x, \qquad f(x) = -x, \qquad f(x) = \tfrac{1}{x}.$$

2.20 - Funzioni iniettive. Come si fa a riconoscere se una funzione è invertibile? Basta verificare se è "iniettiva". Allora è anche invertibile. Una funzione $f(x)$ definita su di un dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice **iniettiva** se *a valori distinti della* $x \in D$ *corrispondono valori distinti di* $f(x)$:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ciò significa che il grafico della funzione incontra le parallele all'asse x in <u>al</u> <u>più</u> un solo punto: infatti se ci fossero almeno due intersezioni, queste corrisponderebbero a due valori della x distinti, ma con lo stesso valore della $y = f(x)$. Se allora denotiamo con V l'insieme dei <u>valori</u> della f, cioè l'insieme di tutti i valori y assunti dalla $f(x)$ quando x varia in tutto D (lo chiamiamo anche **insieme immagine** di f), osserviamo che ad ogni $y \in V$ viene associato uno ed un solo valore x tale che $y = f(x)$. Si definisce allora una funzione $x = g(y)$, di dominio V, che è proprio la funzione inversa della $y = f(x)$. Si ricordi allora che: se una funzione è iniettiva, quindi invertibile, allora il suo insieme immagine $V = f(D)$ diventa il dominio della funzione inversa.

In certi casi una funzione può essere resa iniettiva, quindi invertibile, restringendo opportunamente il suo dominio. Esempio: la funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva, se intesa definita su tutto $\mathbb{R}$. Infatti le parallele all'asse x, dalla parte positiva dell'asse y, incontrano il grafico in due punti, a cui corrispondono gli stessi valori del quadrato:

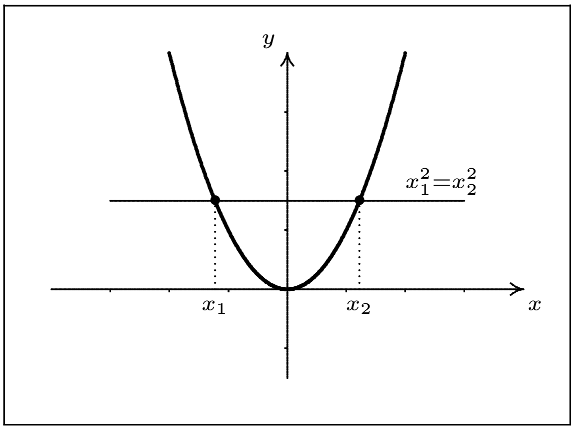


Fig. 2.29 - Non iniettività della funzione $f(x) = x^2$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

Però diventa iniettiva se la consideriamo ristretta, per esempio, a $x \geq 0$.

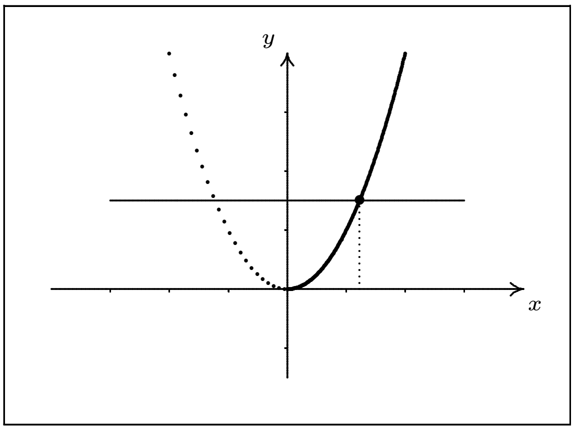


Fig. 2.30 - Iniettività della funzione $f(x) = x^2$ definita su $x \geq 0$.

La tabella seguente riporta le funzioni inverse delle funzioni elementari che vedremo nei prossimi paragrafi, precisandone i rispettivi domini. Due funzioni inverse di fondamentale impotanza sono l'**esponenziale** e^x e il **logaritmo naturale** $\log x$; queste saranno definite e studiate nel prossimo capitolo.

$f(x)$	D	D^{-1}	$f^{-1}(x)$
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x
x^2	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$\sqrt{x}$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sqrt[3]{x}$
x^{2n}	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$\sqrt[2n]{x}$
x^{2n+1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sqrt[2n+1]{x}$
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$	$\arcsin x$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$\arccos x$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$	$\log x$

Tabella delle funzioni inverse elementari.
D è il dominio, eventualmente ristretto, della $f(x)$,
D^{-1} è l'immagine di $f(x)$ e dominio della $f^{-1}(x)$.

2.21 - Le radici e le potenze non intere. Quanto detto per $f(x) = x^2$ vale per ogni potenza pari:

- *ogni potenza pari è iniettiva, quindi invertibile, se ristretta a valori non-negativi (cioè positivi o nulli) della x.*

Invece, come si osserva subito dal grafico di x^3,

- *ogni potenza dispari è iniettiva, quindi invertibile, senza restrizioni.*

La funzione inversa di una potenza x^n prende il nome di **radice n-esima** e la si denota con $\sqrt[n]{x}$. Per quanto ora visto, è definita su tutto $\mathbb{R}$ se n è dispari, solo su $x \geq 0$ se n è pari.

Quando si dice "potenza della variabile x" s'intende, tacitamente, potenza intera *positiva* o *nulla*, cioè x^n con $n \in \mathbb{N}$. Si pone $x^0 = 1$.

La relazione di invertibilità tra potenze e radici è messa in evidenza dalla notazione

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Infatti:

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}} = x^1 = x.$$

Si possono considerare anche funzioni **potenza razionale positiva**,

$$x^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{x^n}, \qquad n, d \in \mathbb{N},\ d \neq 0.$$

e funzioni **potenza razionale negativa**, $-q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$,

$$x^{-q} = \frac{1}{x^q}.$$

Si possono infine anche considerare le funzioni **potenza reale**, cioè x^r con $r \in \mathbb{R}$ qualsiasi. La loro definizione richiede l'uso delle successioni: si considera una qualunque successione di numeri razionali q_n convergente a r e si pone

$$x^r = \lim_{n \to +\infty} x^{q_n}.$$

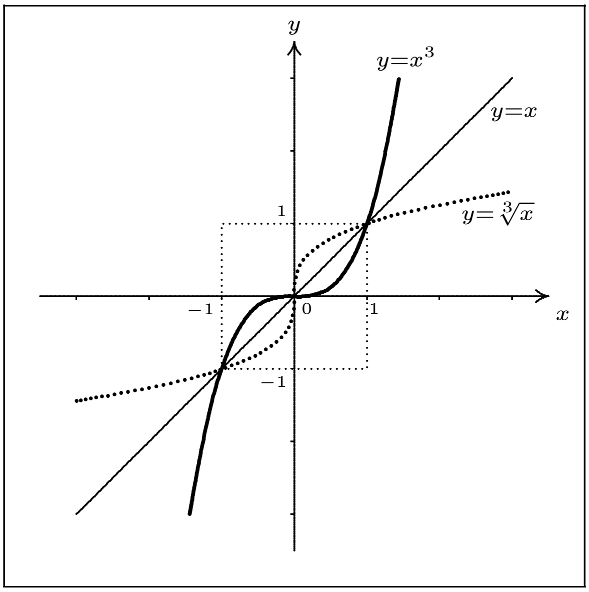


Fig. 2.31 - Le funzioni inverse x^3 e $\sqrt[3]{x}$.

2.22 - Le funzioni circolari inverse. La funzione $\sin x$ diventa iniettiva (quindi invertibile) se ristretta all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Con questa scelta del suo dominio ristretto, la sua funzione inversa è denotata con $\arcsin x$ (**arcoseno**).

La funzione $\cos x$ è resa invertibile restringendola all'intervallo $[0, \pi]$ e la sua inversa viene indicata con $\arccos x$ (**arcocoseno**). Siccome il seno ed il coseno hanno come immagine l'intervallo chiuso $[-1, 1]$, le loro funzioni inverse risultano definite in questo intervallo.

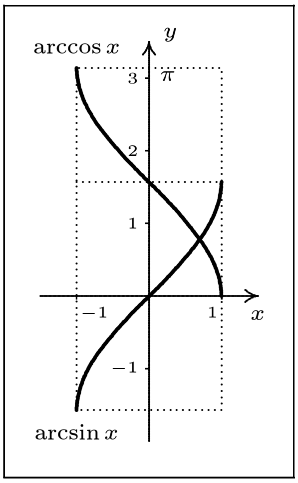


Fig. 2.32 - Le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$.

Infine la funzione $\tan x$ è invertibile sulla sua restrizione a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e la funzione inversa è chiamata $\arctan x$ (**arcotangente**), che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

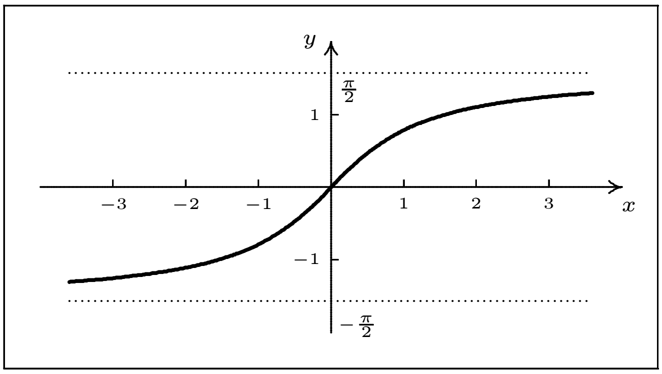


Fig. 2.33 - La funzione $\arctan x$.

2.23 - Funzioni continue. Quasi tutte le funzioni che comunemente si incontrano nelle applicazioni, soddisfano alla seguente proprietà: in ogni intervallo dove sono definite il loro grafico è costituito da una curva "continua", priva di interruzioni. Negli esempi che abbiamo visto non si comportano in questo modo la "funzione scalino" e la "funzione di Dirichlet". Due altri esempi sono le funzioni "parte decimale" e "parte intera" di un numero $x \geq 0$.

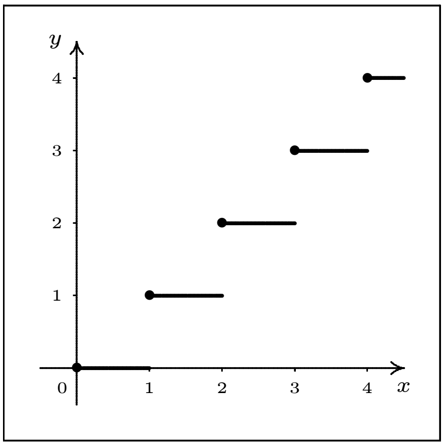


Fig. 2.34 - La funzione "parte intera di $x \geq 0$":
$y =$ massimo intero $\leq x$.

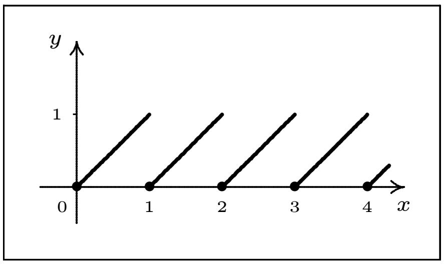


Fig. 2.35 - La funzione "parte decimale di $x \geq 0$":
$y = x - \big($massimo intero $\leq x.\big)$

Osserviamo inoltre che anche la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha un grafico "continuo" sebbene costituito da due parti disgiunte, proprio perché essa è definita in due intervalli disgiunti, in ciascuno dei quali il grafico è "continuo".

La nozione di "continuità" di una funzione, ora espressa in termini intuitivi, ammette comunque una definizione rigorosa, illustrata brevemente nei prossimi due paragrafi.

2.24 - Continuità puntuale. Si consideri una funzione $f(x)$ definita in un dominio D ed un punto $x_0 \in D$.

• Diciamo che la funzione f è **continua nel punto** $x_0 \in D$ se *comunque si scelga un intorno A del numero $y_0 = f(x_0)$, esiste un intorno B di x_0 tale che per ogni $x \in B \cap D$ la funzione assume valori $f(x)$ contenuti in A.*

$\boxed{\text{E}}$ Verificare che la funzione scalino non soddisfa a questa condizione in $x_0 = 0$, e che le funzioni parte decimale e parte intera non la soddisfano nei punti $x_0 = 1, 2, 3 \ldots$. Verificare invece che la funzione $f(x) = x^2$ la soddisfa in ogni punto.

2.25 - Continuità globale. Dal concetto di continuità puntuale segue il concetto di continuità "globale", cioè esteso a tutto l'intervallo di definizione:

• Diciamo che una funzione è **continua** se *è continua in ogni punto del suo dominio di definizione.*

$\boxed{!}$ Si dimostra che tutte le funzioni elementari (razionali, irrazionali, circolari, ecc.) sono continue. Si noti bene che il concetto di continuità, sia puntuale che globale, coinvolge solo il punti dell'asse x dove la funzione è definita. Quindi p.es., la funzione $\frac{1}{x}$ è continua anche se il suo grafico è spezzato in due parti: nel punto $x = 0$ infatti non è definita, ma nei due intervalli (complementari al punto $x = 0$) in cui è definita è continua.

2.26 - Proprietà delle funzioni continue. Per le funzioni continue si dimostrano tre fondamentali teoremi:

• **Teorema della permanenza del segno**: *se una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 e se $f(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno di x_0 dove la funzione assume sempre valori dello stesso segno di $f(x_0)$.* Deriva immediatamente dalla definizione di continuità puntuale.

• **Teorema di Weierstrass**: *una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ammette massimo e minimo*; in altre parole: esistono (almeno) due punti $x_M, x_m \in [a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M),$$

per qualunque altro punto $x \in [a, b]$.

• **Teorema dei valori intermedi**: *una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$*; in altre parole: comunque si fissi un numero k compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ (inclusi), esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ (quindi $a \leq c \leq b$) tale che $f(c) = k$.

Come immediato corollario si ha il seguente

• **Teorema di esistenza degli zeri**: *se una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume valori di segno opposto agli estremi, allora esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo, $x_0 \in (a, b)$, dove si annulla: $f(x_0) = 0$.* In altri termini: il grafico della fuzione interseca l'asse x in almeno in un punto interno all'intervallo di definizione.

Tutti questi teoremi hanno varie utili applicazioni. Vediamone subito una.

$\boxed{\text{E}}$ Nell'affrontare il "problema della scatola" (§2.2) possiamo subito affermare che questo ha almeno una soluzione, che esiste cioè almeno un valore x per cui il volume è massimo (il calcolo mostrerà poi che la soluzione è <u>unica</u>). Infatti la funzione volume $V(x)$ che si studia è continua (essendo un polinomio) nell'intervallo chiuso $[0, a]$. Ammette quindi un valore massimo e un valore minimo. Siccome è una funzione positiva (ha cioè valori positivi) per tutti gli x in quest'intervallo, eccetto che agli estremi, dove si annulla, possiamo essere certi che questo massimo sarà ottenuto in qualche punto <u>interno</u> a quest'intervallo, cioè nell'intervallo aperto $(0, a)$, ed il minimo, ovviamente, agli estremi.

2.27 - Limiti di una funzione agli estremi del campo di definizione. Se osserviamo il grafico della funzione $\frac{1}{x}$ notiamo che la funzione *non è limitata* in $x = 0$, nel senso che, avvicinandoci all'origine 0 lungo l'asse x, la funzione assume valori "sempre più grandi", in senso positivo se ci avviciniamo a zero da destra (cioè per valori positivi della x), in senso negativo se ci avviciniamo invece da sinistra. Questo significa, in termini più precisi, che *comunque si fissi un numero positivo arbitrariamente grande* M*, esiste sicuramente un intorno destro dell'origine in cui la funzione* $f(x)$ *assume valori maggiori di* M e anche *un intorno sinistro in cui assume valori minori di* $-M$*.* Tradurremo questa circostanza con le scritture:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

e diremo che *il limite della funzione* $\frac{1}{x}$ *per* x *che tende a 0+* (o a zero da destra) *è* $+\infty$, analogamente nel secondo caso. Osserviamo anche che la funzione assume valori sempre più "piccoli" man mano che ci allontaniamo dall'origine, sempre positivi a destra, negativi a sinistra. Analogo comportamento ha la funzione $\frac{\sin x}{x}$, anche se il diminuire dei valori della funzione avviene con alternanza di segno. Più precisamente osserviamo che *comunque si fissi un numero positivo arbitrariamente piccolo* ε*, esiste certamente un punto sull'asse* x *oltre il quale la funzione assume valori in valore assoluto minori di* ε*.* Scriveremo in questi tre casi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+, \\
&\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-, \\
&\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,
\end{aligned}$$

ed useremo una terminologia analoga al caso precedente. A proposito di quest'ultima funzione, dal suo grafico osserviamo che essa tende al numero 1 quando x tende, da destra o da sinistra, a 0 (dove non è definita): scriviamo allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ma come si può giungere a queste conclusioni senza guardare il grafico delle funzioni ? Occorrono ovviamente: (1) una definizione "rigorosa" del concetto di limite, e quindi, (2) dei teoremi o "regole" atti al loro calcolo. Cosa si può dire infine della funzione $\sin x$ quando x tende a $+\infty$ o $-\infty$? Semplicemente che la funzione *non ammette (o non ha) limite.* Infatti, comunque ci si allontani verso destra o verso sinistra, i valori della funzione oscillano sempre tra -1 e 1.

$\boxed{\text{E}}$ Studiare i limiti dei polinomi e delle funzioni razionali. Applicare i teoremi della permanenza del segno e dell'esistenza degli zeri per dimostrare l'esistenza di (almeno) una radice reale di un'equazione algebrica di grado dispari.

2.28 - Limiti e continuità puntuale. Possiamo estendere la nozione, per ora intuitiva, di limite anche al caso di un punto x_0 appartenente ad uno degli intervalli di definizione della funzione, senza esserne necessariamente un estremo. Osserviamo un fatto semplice ma fondamentale: se la funzione è continua in x_0, allora i suoi valori $f(x)$ si avvicinano (o tendono) al valore $f(x_0)$ quando x si avvicina (o tende) al punto x_0. Se invece la funzione non è continua in x_0, questo non accade. Prendiamo per esempio la funzione scalino: se ci avviciniamo all'origine da destra la funzione tende (restando costante) al valore 1, che non è però il valore assunto dalla stessa funzione nell'origine (infatti, per come abbiamo definito questa funzione, $f(0) = 0$). Al contrario, se ci avviciniamo all'origine da sinistra, la funzione tende (sempre restando costante) a 0, questa volta al valore della funzione in $x = 0$. In conclusione, una funzione è continua in un punto x_0 (del suo dominio di definizione) se e solo e si verifica la condizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

se x_0 è interno ad un intervallo di definizione della $f(x)$, oppure

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0),$$

se x_0 è estremo di un tale intervallo, rispettivamente sinistro e destro.

2.29 - Definizione di limite di una funzione. Della nozione di limite di una funzione si può dare una definizione generale che comprende tutti casi possibili e che si basa sul concetto di <u>intorno</u> di un numero oppure di $\pm\infty$ (vedi §§ 1.11 e 1.12).

Si usa una scrittura del tipo

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta, \tag{1}$$

dove α e β sono simboli che possono assumere, nei vari possibili casi, i seguenti "valori":

$$\alpha = \begin{cases} x_0, \\ x_0^+, \\ x_0^-, \\ +\infty, \\ -\infty, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} \ell, \\ \ell^+, \\ \ell^-, \\ +\infty, \\ -\infty, \end{cases} \tag{2}$$

intendendo con

$$\begin{cases} x_0 \;\; \text{un punto interno o estremo di un intervallo di definizione di } f(x), \\ \ell \;\; \text{un numero reale.} \end{cases}$$

Con $\alpha = x_0$ si indica il limite per x <u>che</u> <u>tende</u> <u>a</u> x_0, sia da destra (cioè per valori superiori) che da sinistra: si dice allora **limite bilaterale**. Con $\alpha = x_0^\pm$ si indica il limite per x <u>che</u> <u>tende</u> <u>a</u> x_0 <u>da</u> <u>destra</u> (segno +) oppure <u>da</u> <u>sinistra</u> (segno −). Si tratta, in entrambi i casi, di un **limite unilaterale**.

Analoghe considerazioni valgono per il "valore" assunto dal simbolo β: con $\beta = \ell \in \mathbb{R}$ intendiamo dire che il limite è il numero ℓ, senza ulteriore specificazione. Con $\beta = \ell^\pm$ intendiamo invece affermare che la funzione tende al numero ℓ per valori superiori (+) o inferiori (−). Si rivedano gli esempi di §2.27.

Precisato quanto sopra, la (1) si legge:

• *la funzione $f(x)$ tende a (o ha limite) β per x che tende a α.*

Ciò sta a significare, per definizione, che:

• *comunque si scelga un intorno B_β di β, esiste un intorno A_α di α tale che per ogni $x \in A_\alpha$ appartenente al dominio D della funzione e diverso da α (nel caso in cui $\alpha = x_0, x_0^\pm$) si ha $f(x) \in B_\beta$.*

In questa proposizione intendiamo, nei vari casi possibili per il simbolo α:

$$\begin{cases} A_{x_0} & \text{intorno (bilaterale) di } x_0, \\ A_{x_0^+} & \text{intorno destro di } x_0, \\ A_{x_0^-} & \text{intorno sinistro di } x_0, \\ A_{+\infty} & \text{intorno di } +\infty, \\ A_{-\infty} & \text{intorno di } -\infty, \end{cases}$$

e analogamente per B_β.

2.30 - Regole per il calcolo dei limiti. Per il calcolo di un limite non si applica quasi mai la definizione di cui al paragrafo precedente. Non si va cioè a provare se dato un intorno qualsiasi B_β si può trovare un intorno A_α per cui .... Questo procedimento lo si applica soltanto per il calcolo di alcuni limiti di funzioni elementari (quali quelle fin qui viste). Per il calcolo del limite di una funzione composta si utilizzano invece alcune regole.

• **Regola di scambio**. Sia data una funzione composta $f(g(x))$. Se f è continua, allora l'operazione di limite si scambia con l'operazione f, nel senso che, se f è definita in $\lim_{x\to\alpha} g(x)$,

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\big(\lim_{x\to\alpha} g(x)\big).$$

Esempi:

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\lim_{x\to 0+} \sin x} = 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sin \tfrac{1}{x} = \sin\big(\lim_{x\to +\infty} \tfrac{1}{x}\big) = \sin 0 = 0.$$

• **Regole algebriche**. Il limite della somma, del prodotto, del quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, al prodotto e al quoziente dei limiti, purché non si cada in una **forma indeterminata**. Detta in questo modo, questa regola è piuttosto vaga; ma si chiarisce con qualche esercizio. Possiamo far rientrare nella "somma" e "prodotto" dei limiti anche il caso in cui uno di questi non è finito o addirittura non esiste. Esempi:

$$\lim_{x\to 0+} \big(\frac{1}{x} + \sin x\big) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} + \lim_{x\to 0+} \sin x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \big(x^3 + \sin x\big) = \lim_{x\to +\infty} x^3 + \lim_{x\to +\infty} \sin x = +\infty.$$

In questo secondo caso il fatto che il limite di $\sin x$ non esista è ininfluente: conta però il fatto che la funzione $\sin x$ è limitata e quindi non influisce sul tendere a $+\infty$ di x^3. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

perché “prevale” il denominatore sul numeratore (il cui limite non esiste).

Invece, per esempio, il calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\lim_{x\to 0}(1-\cos x)}{\lim_{x\to 0}x^2}$$

ci porta alla forma indeterminata $0/0$. Qui si “fronteggiano”, a numeratore e a denominatore, due infinitesimi, cioè due funzioni che tendono a zero: se “prevale” il denominatore la funzione tende a infinito, se invece “prevale” il numeratore, tende a zero; se hanno la stessa “forza” può capitare che il limite sia un numero (cioè sia finito) oppure non esista. Le **forme indeterminate**, di cui questo è uno dei casi, vengono rappresentate con i simboli seguenti

$$+\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}.$$

A queste si aggiungono quelle relative ai limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, e denotate con

$$0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

Vedremo due modi per risolvere una forma indeterminata: (I) con qualche artificio adatto al caso in esame, oppure, più in generale, (II) applicando la **regola di De l'Hôpital**.

Esempio 1. Esempio di artificio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

supposto di aver già dimostrato che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2}$$

Con lo stesso artificio si dimostra che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0. \tag{3}$$

• **Regola del confronto**. Se per $x\to\alpha$ due funzioni f e g tendono ad un limite λ e μ (finito o infinito) rispettivamente, e se, almeno in un intorno di α, si ha $f(x)\le g(x)$ oppure $f(x)<g(x)$, allora risulta $\lambda\le\mu$.

Questa regola, come la seguente, nel caso in cui uno dei due limiti non è finito, presuppone che la relazione d'ordine $\le$ sui numeri reali venga estesa anche ai simboli $+\infty$ e $-\infty$.

Si badi bene che, anche nel caso in cui valga la disuguaglianza stretta tra le due funzioni, i loro limiti possono essere uguali; quindi:

$\boxed{!}$ *passando al limite le disuguaglianze si attenuano.*

Un semplice esempio è il seguente: $f(x) = 0$ (funzione costante), $g(x) = \frac{1}{x}$. Per $x > 0$, quindi nell'intorno di $+\infty$, si ha $f(x) = 0 < g(x) = \frac{1}{x}$. Risulta però: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

• **Regola del doppio confronto o dei due carabinieri**. Se per $x \to \alpha$ due funzioni f e g tendono ad un medesimo limite λ (finito o infinito) e se in un intorno di α si ha $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ allora anche la funzione $h(x)$ tende allo stesso limite λ. (Qui i due carabinieri sono le funzioni f e g che costringono h, preso di mezzo, a seguirli al loro limite.)

Esempio 2. Per $x \to 0$ la funzione $\frac{\sin x}{x}$ presenta, come si è detto, la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (si noti che questa funzione non è definita in $x = 0$). Questa indeterminazione si può risolvere ricorrendo alla disuguaglianza

$$\sin x < x < \tan x \tag{†}$$

valida in un "piccolo" intorno destro di 0, escluso ovviamente $x = 0$, cioè per piccoli valori di $x > 0$. La validità di tale disuguaglianza discende direttamente dalla definizione geometrica del seno e della tangente (vedi Fig. 2.22). Dividendo per $\sin x > 0$ si trova successivamente

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Applichiamo il teorema dei due carabinieri all'ultima doppia disuguaglianza: siccome la prima (che è una costante) e l'ultima funzione tendono a 1 per $x \to 0+$, segue che $\frac{\sin x}{x}$ tende anch'essa ad 1:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Allo stesso risultato si giunge per $x \to 0-$ (la doppia disuguaglianza (†) è invertita). Otteniamo quindi il risultato (2).

***

Esercizi

Determinare campo di esistenza, zeri, segno e limiti agli estremi del campo di esistenza delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)^2}$

2. $f(x) = \dfrac{4-x}{x} e^x$

3. $f(x) = \log\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

4. $f(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{x}$

5. $f(x) = \dfrac{|x-3|}{|x|-3}$

6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}}$

Capitolo 3

Le derivate

3.1 - Derivata di una funzione. La **derivata** di una funzione $f(x)$ è la funzione, denotata con $f'(x)$, che a x fa corrispondere il valore del coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x:

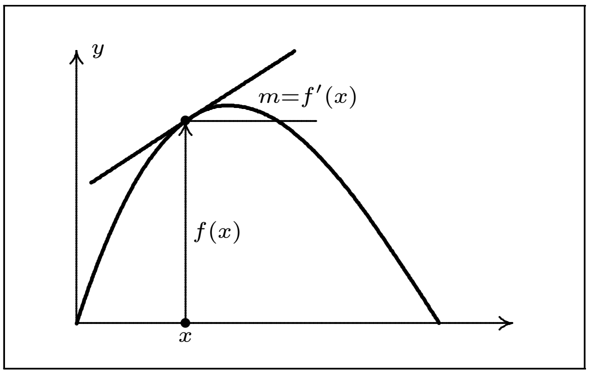


Fig. 3.1 - La derivata $f'(x)$ in un punto x è il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione.

Per rendere rigorosa questa definizione, occorre innanzitutto precisare il significato di **retta tangente**. Fissato un valore di x si consideri la retta congiungente il punto $P = \big(x, f(x)\big)$ ed un altro punto qualunque del grafico $P_h = \big(x+h, f(x+h)\big)$, corrispondente ad un **incremento** h della x (retta secante).

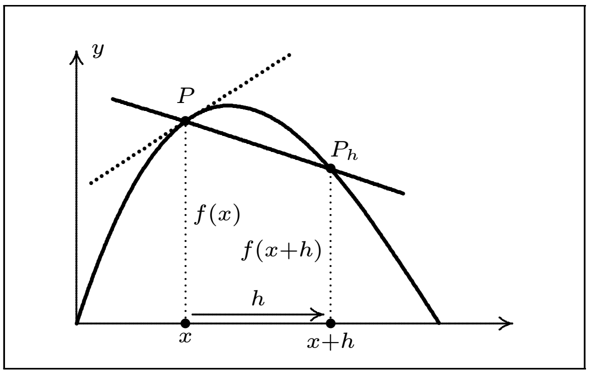


Fig. 3.2 - La retta secante per il punto $P = (x, f(x))$ e corrispondente all'incremento h.

L'incremento h può esssere positivo o negativo (nella figura è $h > 0$). Quando P_h tende a P, cioè quando $h \to 0$, allora la retta secante "tende" alla retta tangente. La retta tangente è quindi ottenuta come limite della retta secante quando P_h tende a P. Questo ragionamento geometrico-intuitivo diventa rigoroso se si considera che il coefficiente angolare della secante è dato dal **rapporto incrementale**

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

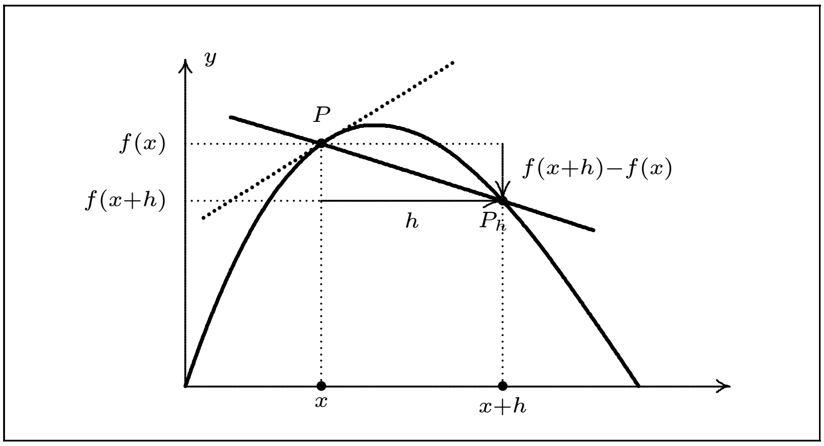


Fig. 3.3 - Gli elementi del rapporto incrementale.

e che di conseguenza il coefficiente angolare della retta tangente è dato dal limite

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{\text{sec}}.$$

Unendo queste due ultime formule concludiamo che *la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ è definita dal limite del rapporto incrementale*

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{1}$$

Come per tutte le definizioni, occorre distinguere i casi in cui l'oggetto definito esiste oppure no. La funzione $f(x)$ si dirà **derivabile** se il limite (1) esiste ed è finito per ogni x del suo campo di definizione. Ci possono infatti essere dei punti x in cui la funzione **non è derivabile**. I casi di non derivabilità sono i seguenti.

(i) Il limite (1) non esiste. Un sottocaso particolare è quello dei **punti cuspidali**, dove il limite destro, cioè per $h \to 0+$ (l'incremento h tende a zero per valori positivi) non coincide col limite sinistro, cioè per $h \to 0-$. In questi punti la tangente ottenuta per P_h che tende a P da destra è diversa da quella ottenuta per P_h che tende a P da sinistra:

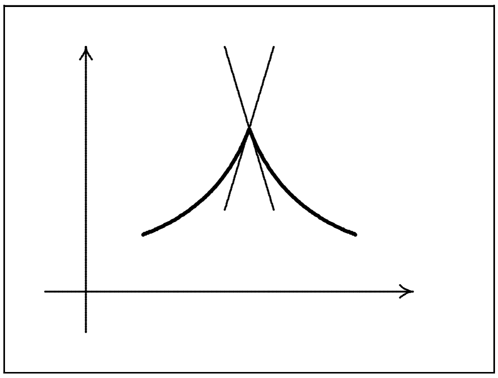


Fig. 3.4 - Punto cuspidale.

Questo caso ci porta ad introdurre il concetto di **derivata sinistra** e **derivata destra** in un punto x: sono rispettivamente il limite sinistro ed il limite destro del rapporto incrementale (1),

$$\boxed{f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \tag{2}$$

Se nel punto x la derivata destra e quella sinistra coincidono, si ha la derivabilità in senso ordinario. In un punto cuspidale come nella Fig. 3.4, la derivata sinistra e destra esistono entrambe ma non sono uguali.

Queste **derivate unilaterali** hanno particolare significato ed utilità quando il punto x in questione è estremo di un intervallo di definizione della funzione.

(ii) Vi sono casi di non derivabilità in cui almeno una derivata unilaterale (destra o sinistra) non esiste o non è finita.

(iii) Il limite (1) esiste ma non è finito. In questi punti il grafico ha **tangente verticale**.

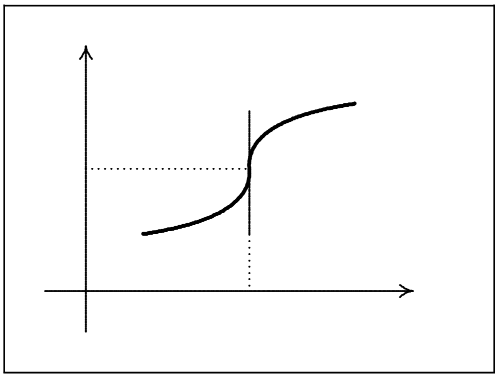


Fig. 3.5 - Punto a tangente verticale.

$\boxed{!}$ Se una funzione è derivabile allora è anche, necessariamente, continua. Infatti, se in un punto x_* esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale, allora anche il limite del numeratore, cioè dell'incremento della funzione, esiste e <u>deve</u> essere nullo (perché lo è quello del denominatore h):

$$\lim_{h\to 0} \big(f(x_*+h) - f(x_*)\big) = 0.$$

Dunque è

$$\lim_{h \to 0} f(x_* + h) = f(x_*).$$

Se si pone $x = x_* + h$, quest'uguaglianza si traduce in

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*),$$

che esprime proprio la continuità della funzione del punto x_* (vedi §2.28). Dunque:

- *la derivabilità implica la continuità.*

Però, al contrario,

- *la continuità non implica la derivabilità.*

I grafici delle Figg. 3.4 e 3.5 mostrano due esempi di funzioni continue, ma non derivabili in un punto.

Il passaggio da una funzione $f(x)$ alla sua derivata può essere reiterato, nel senso che, determinata la **derivata prima** $f'(x)$ di $f(x)$, si può considerare (se esiste) la derivata di $f'(x)$, denotata con $f''(x)$, detta **derivata seconda** della $f(x)$, e così via, la derivata terza $f'''(x)$, ecc.

$\boxed{!}$ Per la derivata (prima) di una funzione $f(x)$ si usano, a seconda delle convenienze, tre notazioni diverse:

$$f'(x), \qquad Df(x), \qquad \frac{df}{dx}.$$

Per le derivate successive, quindi per la generica **derivata n-esima** si usano, analogamente, le tre notazioni seguenti:

$$f^{(n)}(x), \qquad D^n f(x), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

$\boxed{!}$ Come vedremo, la conoscenza della derivata prima e delle derivate successive di una funzione permette di dedurre non soltanto precise indicazioni sulle proprietà fondamentali della funzione stessa (crescenza/decrescenza, massimi/minimi locali, concavità/convessità, flessi), che consentono il tracciamento di un grafico sommario, ma anche di costruire delle formule atte alla loro tabulazione e al calcolo dei loro zeri.

Tuttavia, prima di passare allo studio di queste importanti applicazioni, esaminiamo il problema del calcolo delle derivate.

In pratica il calcolo della derivata di una funzione non si effettua (quasi) mai attraverso il calcolo del limite del suo rapporto incrementale (1), bensì attraverso l'uso contemporaneo di

$$\boxed{\text{derivate fondamentali}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{regole di derivazione}}$$

3.2 - Derivate delle funzioni fondamentali. Un primo elenco di derivate fondamentali è il seguente:

Tab. 1

Potenze e radici	
$f(x)$	$f'(x)$
x^p	$p\,x^{p-1}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\,\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Tab. 2

Funzioni circolari	
$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Tab. 3

Funzioni circolari inverse	
$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Si noti che, nella prima tabella, la seconda e terza riga non sono che un caso particolare della prima (con $p = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{n}$).

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo della derivata di una potenza intera**. Dimostrare che

$$\boxed{Dx^n = n\,x^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}} \tag{1}$$

Utilizzando la definizione di derivata e la formula della potenza n-sima di un binomio (§1.19), si ha successivamente:

$$\begin{aligned}
Dx^n &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}\right) \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}$$

In particolare per la funzione identica si ha

$$\boxed{Dx = 1} \tag{2}$$

Si noti bene che l'aver dimostrato la formula (1) per $n \in \mathbb{N}$, cioè per una potenza intera positiva, non significa (ancora) che essa debba ritenersi vera per ogni potenza, negativa o non intera (prima riga della Tab. 1). Questo lo si potrà dimostrare solo più avanti.

E **Calcolo della derivata di seno e coseno** (Tab. 2). Si sfrutta la formula del seno di una somma: $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$. Allora:

$$\begin{aligned} D \sin x &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\sin x \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \, \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \, \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \, \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \end{aligned}$$

Qui si sono utilizzati due limiti noti (vedi formule (2-3) di §2.30):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

In maniera analoga si prova che $D \cos x = - \, \sin x$. Si osservi che, applicando due volte l'operazione di derivazione, si trova

$$\boxed{D^2 \sin x = -\sin x, \qquad D^2 \cos x = -\cos x} \tag{3}$$

3.3 - Regole di derivazione. Le prime regole di derivazione sono riassumibili nella seguente tabella (che sarà completata più avanti):

Tab. 4

[1]	Derivata di una costante	$c' = 0$
[2]	Derivata di una funzione per una costante	$(cf)' = c\, f'$
[3]	Derivata di una somma o differenza	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
[4]	Derivata di un prodotto, Regola di Leibniz	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
[5]	Derivata di un rapporto	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
[6]	Derivata del reciproco	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\,\frac{g'}{g^2}$
[7]	Derivata di una funzione composta	$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$
[8]	Derivata di una funzione inversa	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$

Queste regole si desumono direttamente dalla definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

E Dimostrazione delle regole [1] e [2]. Per una funzione costante $f(x) = c$ il rapporto incrementale è nullo, quindi il suo limite è zero; dunque la derivata di una funzione costante è la funzione identicamente nulla. Invece, per una funzione del tipo $g(x) = cf(x)$ il rapporto incrementale risulta essere

$$\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

cioè uguale al prodottto della costante c per il rapporto incrementale della $f(x)$. Dunque il suo limite è uguale a $cf'(x)$.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrazione della regola [3]: derivata di una somma. Questa proprietà discende immediatamente, come per i due esempi precedenti, dal fatto che il rapporto incrementale di una somma (o differenza) di due funzioni è la somma (o differenza) dei rapporti incrementali.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrazione della regola di Leibniz [4]. Per la definizione di derivata si ha

$$(fg)' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big[f(x+h)\; g(x+h) - f(x)\; g(x)\big] = \ldots$$

All'incremento della funzione aggiungiamo e togliamo il termine $f(x)\, g(x+h)$. Di conseguenza si ha:

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \right) = \ldots$$

e per le proprietà dei limiti di somme e di prodotti:

$$= f'(x) \lim_{h \to 0} g(x+h) + g'(x)\, f(x).$$

Ma se la funzione g è derivabile, è anche continua, per cui $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$ e la regola di Leibniz è dimostrata. Si noti che la regola [2] segue dalle regole [1] e [4], posto $g = c$.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrazione della regola di derivazione di un rapporto [5]. Poniamo $q = f/g$. Dall'uguaglianza $f = gq$ segue, applicando la regola di Leibniz, $f' = g'q + gq'$ e quindi $q' = (f' - g'q)/g$. Di qui, essendo $q = f/g$ si ritrova la formula della derivazione del quoziente, da cui discende come caso particolare ($f = 1$) la regola di derivazione del reciproco di una funzione [6].

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo della derivata della tangente** (Tab. 2). Applichiamo la regola [5]:

$$D \tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)'\; \cos x - \sin x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3.4 - Derivata di una funzione composta. La formula [7] della tabella, sulla derivazione di una funzione composta, si traduce in pratica nella regola seguente:

• Se $y = f(u)$ è una funzione di una variabile u che a sua volta è una funzione $u = g(x)$, allora per calcolare la derivata della funzione composta si procede così: (I) si deriva la

f rispetto alla variabile u (come variabile indipendente), (II) nell'espressione trovata di $f'(u)$ si sostituisce la variabile u con la sua funzione $u = g(x)$, e (III) si moltiplica la funzione trovata per la derivata $g'(x)$.

$\boxed{\text{E}}$ Per dimostrare la [7] si pone $u_h = g(x+h)$ e si ha successivamente:

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{u_h\to u} \frac{f(u_h) - f(u)}{u_h - u}\,\frac{u_h - u}{h}$$
$$= \lim_{u_h\to u} \frac{f(u_h) - f(u)}{u_h - u}\,\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(u)\, g'(x) = f'(g(x))\, g'(x),$$

osservando che per $h \to 0$ si ha $u_h \to u$.

$\boxed{\text{E}}$ Due esempi di derivazione di funzione composta. La funzione $y = \sin x^2$ è composta da $y = f(u) = \sin u$ e $u = g(x) = x^2$. Quindi:

$$(\sin x^2)' = (\sin u)'(x^2)' = \cos u \cdot 2\,x = 2\,x\,\cos x^2.$$

Invece la funzione $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ è composta da $y = f(u) = u^2$ e $u = \sin x$. Quindi:

$$(\sin^2 x)' = (u^2)'(\sin x)' = 2\,u\,\cos x = 2\,\sin x\,\cos x = \sin 2x$$

3.5 - Il simbolo di differenziale. La regola della derivazione di una funzione composta si può rendere più automatica e sicura introducendo l'operatore o simbolo di **differenziale** d. Data una funzione $f(u)$ di una qualunque variabile u, il suo differenziale è definito dall'uguaglianza

$$df = f'(u)\,du. \tag{1}$$

Se u coincide con una variabile indipendente x, la scrittura precedente si traduce ovviamente in

$$\boxed{df = f'(x)\,dx} \tag{2}$$

e quindi

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}} \tag{3}$$

Ma se la variabile u a sua volta è una funzione di una variabile indipendente x, cioè se $u = g(x)$, allora, essendo ancora

$$du = g'(x)\,dx$$

dalla (1) si deduce ovviamente

$$df = f'(u)\,g'(x)\,dx.$$

Quindi in conclusione

$$\frac{df}{dx} = f'\big(g(x)\big)\,g'(x),$$

che coincide con la formula [7] della Tab. 4.

$\boxed{\text{E}}$ Applicando l'operatore d alla funzione $f(x) = \sin x^2$, risulta

$$\begin{aligned} d(\sin x^2) &= d(\sin u) \qquad (\text{dove } \; u = x^2) \\ &= \cos u \, du \qquad (\text{perché } \; (\sin u)' = \cos u) \\ &= \cos x^2 \, d(x^2) = 2 \, \cos x^2 \, x \, dx. \qquad (\text{perché } \; (x^2)' = 2x). \end{aligned}$$

Quindi:

$$(\sin x^2)' = \frac{d \sin x^2}{dx} = 2 \, x \, \cos x^2,$$

come trovato in precedenza. Applicandolo invece alla funzione $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$, si trova

$$\begin{aligned} d(\sin^2 x) &= d(u^2) \qquad (\text{dove } \; u = \sin x) \\ &= 2 \, u du \\ &= 2 \, \sin x \, d \sin x = 2 \, \sin x \, \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Quindi:

$$(\sin^2 x)' = \frac{d \sin^2 x}{dx} = 2 \, \sin x \, \cos x.$$

3.6 - Derivata di una funzione inversa. Applichiamo la formula [7] al caso in cui $g(x) = f^{-1}$ è la funzione inversa della $f(x)$. Siccome la funzione composta $f(g(x)))$ coincide con la funzione identica x, la cui derivata vale 1, si trova

$$1 = f'\big(g(x)\big) \, g'(x) = f'\big(f^{-1}(x)\big) \, (f^{-1})'(x).$$

Di qui segue la formula [8], che si può rappresentare nella terna di formule:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}, \qquad y = f^{-1}(x), \qquad x = f(y)} \tag{1}$$

In questo modo la regola della derivata della funzione inversa risulta di più facile applicazione.

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo delle derivate delle funzioni circolari inverse** (Tab. 3). Applichiamo le (1) al caso $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$, $x = f(y) = \sin y$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In questo sviluppo abbiamo espresso $\cos y$ come funzione della x attraverso l'uguaglianza $1 = \cos^2 y + \sin^2 y$, e quindi $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$. Abbiamo scelto $\cos y = +\sqrt{1 - x^2}$ anziché $\cos y = -\sqrt{1 - x^2}$ perché l'arcoseno è una funzione crescente (vedi Fig. 2.32) e non può avere derivata negativa. Applichiamo le (1) al caso $y = f^{-1}(x) = \arccos x$, $x = f(y) = \cos y$:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Qui abbiamo scelto il segno $-$ nell'uguaglianza $\sin y = \pm\sqrt{1-x^2}$, perché la funzione arcocoseno è decrescente. Applichiamo le (1) al caso $y = f^{-1}(x) = \arctan x$, $x = f(y) = \tan y$:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

3.7 - L'esponenziale e il logaritmo. Introdotta la nozione di derivata, siamo ora in grado di definire due funzioni, una inversa dell'altra, che svolgono un ruolo fondamentale in matematica: l'**esponenziale** e il **logaritmo**, denotate rispettivamente con

$$\exp x, \quad \log x$$

o con $\exp(x)$, $\log(x)$. Essendo funzioni inverse una dell'altra, valgono le uguaglianze

$$\exp(\log x) = x, \qquad \log(\exp x) = x, \tag{1}$$

ed i loro grafici sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$:

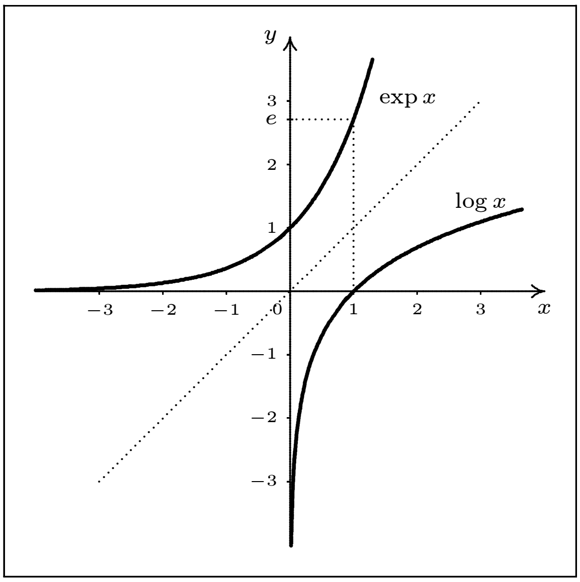


Fig. 3.6 - L'esponenziale e il logaritmo.

• *La funzione esponenziale* $\exp x$ *è quell'*<u>*unica*</u> *funzione, definita su tutto* $\mathbb{R}$*, che soddisfa a queste due condizioni*:

$$\exp x \quad \begin{cases} \text{(I) coincide con la sua derivata,} \quad (\exp x)' = \exp x, \\ \text{(II) vale 1 per } x = 0\text{:} \quad \exp(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

La (I) equivale alla seguente proprietà: in ogni punto del grafico la retta tangente ha coefficiente angolare uguale al valore $y = \exp x$ assunto dalla funzione in quel punto. La figura seguente illustra questra proprietà:

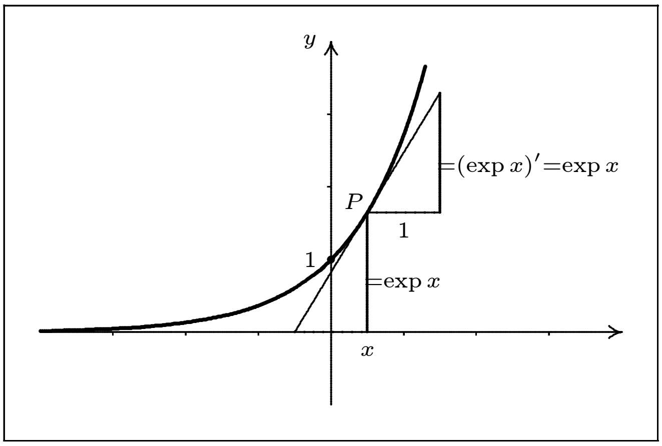


Fig. 3.7 - I due triangoli rettangoli sono uguali, con base 1.

In termini equivalenti: la tangente al grafico in un suo punto P e la verticale uscente da P intersecano sull'asse x un segmento la cui lunghezza è sempre 1, qualunque sia P.

3.8 - Proprietà dell'esponenziale. Le proprietà fondamentali della funzione esponenziale sono le seguenti.

(I) Ogni funzione $f(x)$ uguale alla dua derivata, cioè tale che $f'(x) = f(x)$ è del tipo

$$f(x) = c \exp x, \qquad c \in \mathbb{R} \qquad (c = \text{costante}). \tag{1}$$

Osserviamo, applicando la regola di derivazione di una costante per una funzione, che la derivata di $c \exp x$ coincide proprio con $c \exp x$. Quello però che qui si vuole affermare è la proprietà inversa, che è abbastanza intuitiva, ma che andrebbe dimostrata. Osserviamo ancora che la costante c che compare nella (1) è proprio uguale al valore della funzione $f(x)$ in $x = 0$. Infatti, essendo per definizione $\exp(0) = 1$,

$$f(0) = c \exp(0) = c.$$

(II) Vale la **proprietà caratteristica**: per ogni $x, p \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\exp(x + p) = \exp(x) \cdot \exp(p)} \tag{2}$$

Di conseguenza, se consideriamo il valore di $\exp x$ per $x = 1$, cioè il numero definito da

$$\boxed{e = \exp(1)} \tag{3}$$

e applichiamo la formula precedente troviamo che

$$\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e = e^2,$$

e quindi che:

(III) Per ogni intero non negativo $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(n) = \underbrace{e \cdot \ldots \cdot e}_{n \text{ fattori}} = e^n. \tag{4}$$

Osserviamo allora una cosa importante: la funzione $\exp x$ estende ad ogni numero x non intero i valori delle potenze ad esponente intero positivo di un ben determinato numero, denotato con e, uguale al valore di $\exp x$ nel punto $x = 1$ (vedi (3)). Questo particolare numero reale è detto **numero di Neper**. Per questo motivo si usa anche la notazione

$$\boxed{\exp x = e^x} \tag{5}$$

La (2) si scrive pertanto anche

$$e^{x+p} = e^p \, e^x. \tag{6}$$

Questa formula mostra che *traslare la funzione esponenziale a sinistra di p equivale a moltiplicarla per la costante $c = e^p$.*

(IV) La funzione esponenziale ammette il seguente *sviluppo in serie di potenze*:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots} \tag{5}$$

Per $x = 1$ si ottiene proprio la serie del numero di Neper e

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \tag{6}$$

già considerata al §1.17.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare la (2). Utilizziamo la proprietà (I). Fissato un numero p, consideriamo la funzione $f(x) = \exp(x + p)$. Applicando la regola della derivata della funzione composta troviamo che $f'(x) = \exp(x + p)\,(x + p)' = \exp(x + p)\,1 = f(x)$. Quindi esiste una costante c tale che $f(x) = c \exp x$, cioè tale che

$$\exp(x + p) = c \exp x.$$

Ponendo in questa formula $x = 0$, troviamo $\exp(p) = c \exp(0) = c$. Quindi, risostituendo in questa formula questa espressione di c, troviamo proprio la (2).

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare la proprietà (IV). Si dimostra, nell'ambito della teoria delle serie che se una funzione è sviluppata in serie di potenze,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \tag{\dagger}$$

allora questa serie *è derivabile termine a termine*, nel senso che la derivata $f'(x)$ è esprimibile con la serie delle derivate:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots + n\,a_n\,x^{n-1} + \ldots \tag{‡}$$

Imponiamo la condizione $f' = f$. Uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di (†) e (‡) troviamo le catene di uguaglianze

$$\begin{cases} a_1 = a_0, \\ 2\,a_2 = a_1, \\ 3\,a_3 = a_2, \\ 4\,a_4 = a_3, \\ \ldots \\ n\,a_n = a_{n-1}, \\ \ldots \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = a_0, \\ a_2 = \frac{1}{2}\,a_1 = \frac{1}{2}\,a_0, \\ a_3 = \frac{1}{3}\,a_2 = \frac{1}{3!}\,a_0, \\ a_4 = \frac{1}{4}\,a_3 = \frac{1}{4!}\,a_0, \\ \ldots \\ a_n = \frac{1}{n!}\,a_0, \\ \ldots \end{cases}$$

Dunque la condizione di uguaglianza tra la funzione $f(x)$ e la sua derivata $f'(x)$ implica che

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Questo mostra due cose: (1) se imponiamo la condizione che per $x = 0$ si abbia $f(0) = 1$, che è la seconda proprietà che definisce la funzione $\exp x$, troviamo $a_0 = 1$ e quindi proprio lo sviluppo in serie (5) dell'esponenziale; (2) la condizione $f' = f$ implica proprio $f(x) = c \exp x$, posto $c = a_0$; è quindi dimostrata la proprietà (I) all'inizio del paragrafo.

3.9 - Proprietà del logaritmo. Le proprietà fondamentali della funzione logaritmo sono le seguenti.

(I) La funzione $\log x$ è definita per $x > 0$ ed assume i seguenti valori particolari:

$$\log 1 = 0, \qquad \log e = 1. \tag{1}$$

Questo segue direttamente dal fatto che $\log x$ è inversa di e^x (si vedano i grafici in Fig. 3.6).

(II) La sua derivata è

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}} \tag{2}$$

(III) Vale la **proprietà caratteristica**: per ogni $c, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\log(c\,x) = \log c + \log x} \tag{3}$$

(IV) Per ogni $p \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\log x^p = p\,\log x} \tag{4}$$

E Dimostrare la (2). Applichiamo le formule (1) di §3.6 con $y = f^{-1}(x) = \log x$ e $x = f(y) = e^y$:

$$(\log x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

E Dimostrare la (3). Siccome l'esponenziale ed il logaritmo sono funzioni inverse, risulta

$$e^{\log(cx)} = cx. \tag{$\dagger$}$$

Per la proprietà caratteristica dell'esponenziale si ha anche

$$e^{\log c+\log x} = e^{\log c}\, e^{\log x} = cx. \tag{$\ddagger$}$$

Queste due uguaglianze mostrano che

$$e^{\log cx} = e^{\log c+\log x}.$$

Di qui, prendendo i logaritmi di entrambi i membri, segue la (3).

E Dimostrare la (4). Per $p = n \in \mathbb{N}$ (intero positivo) la (4) segue dalla (3). Per dimostrare che vale la (4) per qualunque p, osserviamo che le due funzioni coinvolte hanno la stessa derivata:

$$\begin{aligned}
&(\log x^p)' = \frac{1}{x^p}\,(x^p)' = \frac{p\,x^{p-1}}{x^p} = \frac{p}{x},\\
&(p\,\log x)' = p\,(\log x)' = \frac{p}{x}.
\end{aligned}$$

Inoltre esse hanno lo stesso valore per $x = 1$: infatti $\log 1^p = \log 1 = 0$ e $p\,\log 1 = p\,0 = 0$. Come vedremo più avanti, *due funzioni che hanno la stessa derivata differiscono per una costante*, quindi se hanno anche lo stesso valore in un prefissato punto (nel nostro caso in $x = 1$) coincidono.

E Per la funzione traslata $\log(p+x)$, con $p > 0$ sussiste lo sviluppo in serie di potenze

$$\boxed{\log(p+x) = \log p + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\,p^n} = \log p + \frac{x}{p} - \frac{x^2}{2p^2} + \frac{x^3}{3p^3} - \frac{x^4}{4p^4} + \ldots} \tag{5}$$

che però è (lentamente) convergente solo per $|x| < p$. Con questa serie, conoscendo il numero $\log p$, possiamo calcolare il logaritmo di un numero vicino a p. In particolare, per $p = 1$, abbiamo la serie

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots} \tag{6}$$

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare la formula (5). Riprendiamo le formule (†) e (‡) di §3.8:

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n, \\ f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots + n\,a_n\,x^{n-1} + \ldots \end{cases} \tag{$*$}$$

Se $f(x) = \log(p + x)$, allora $f'(x) = (p + x)^{-1}$, cioè:

$$a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots + n\,a_n\,x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{p + x},$$

ovvero

$$(p + x)(a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots + n\,a_n\,x^{n-1} + \ldots) = 1.$$

Deduciamo quindi, per i coefficienti, le uguaglianze:

$$\begin{cases} p\,a_1 = 1, \\ 2\,p\,a_2 + a_1 = 0, \\ 3\,p\,a_3 + 2\,a_2 = 0, \\ 4\,p\,a_4 + 3\,a_3 = 0, \\ \ldots \\ n\,p\,a_n + (n-1)\,a_{n-1} = 0, \\ \ldots \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{p}, \\ a_2 = -\,\frac{a_1}{2p} = -\,\frac{1}{2p^2}, \\ a_3 = -\,\frac{2a_2}{3p} = \frac{1}{3p^3}, \\ a_4 = -\,\frac{3a_3}{4p} = -\,\frac{1}{4p^4}, \\ \ldots \\ a_n = -\,\frac{(n-1)a_{n-1}}{np} = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{np^n}, \\ \ldots \end{cases}$$

che determinano tutti i coefficienti della serie (5), eccetto a_0. Ma ponendo $x = 0$ nella prima delle ($*$) troviamo $\log(0 + p) = f(0) = a_0$, dunque $a_0 = \log p$.

3.10 - Esponenziali e logaritmi in base qualunque. Per ogni fissato numero positivo a, risultano definite le due funzioni

$$\boxed{a^x = e^{x\,\log a}, \qquad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}} \tag{1}$$

Esse prendono rispettivamente il nome di **esponenziale di base** a e di **logaritmo in base** a. È evidente che per $a = e$, essendo $\log e = 1$, ritroviamo le funzioni $\exp x$ e $\log x$ definite in precedenza. Per questo la funzione $\log x$ (logaritmo in base e) viene detta **logaritmo naturale** e viene anche denotata con $\ln x$:

$$\ln x = \log x = \log_e x.$$

Valgono per queste funzioni proprietà analoghe a quelle dell'esponenziale e del logaritmo naturale:

(I) Sono funzioni una inversa dell'altra:

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a(a^x) = x. \tag{2}$$

Infatti:

$$\log_a(a^x) = \frac{\log a^x}{\log a} = \frac{x \log a}{\log a} = x.$$

(II) Valgono le proprietà caratteristiche:

$$a^{x+p} = a^x\, a^p, \qquad \log_a(cx) = \log_a c + \log_a x. \tag{3}$$

Quindi anche

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a x^p = p \log_a x. \tag{4}$$

(III) Le loro derivate sono:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log a, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}} \tag{5}$$

$\boxed{!}$ Come si vede dalla seconda delle (3), il logaritmo trasforma prodotti in somme, nel senso che attraverso il logaritmo (e la sua funzione inversa) l'operazione di moltiplicazione di due numeri viene ricondotta alla somma dei corrispondenti logaritmi. Questa è l'origine storica dei logaritmi, e anche la base teorica del **regolo calcolatore**, strumento tascabile di calcolo di largo uso in passato, fino all'avvento dei calcolatori elettronici. Sovente usati sono i logaritmi in base $a = 2$ e in base $a = 10$. L'uso della prima base è, in particolare, connesso con la rappresentazione binaria dei numeri. Il logaritmo in base 10, che si denota anche con $\operatorname{Log} x$, è detto **logaritmo decimale** o **logaritmo di Briggs** (1561-1631): la sua utilità risiede essenzialmente nel fatto che $\log_{10}(x)$ aumenta di 1 quando x viene moltiplicato per 10:

$$\log_{10}(10\,x) = \log_{10} 10 + \log_{10} x = 1 + \log_{10} x. \tag{6}$$

Il logaritmo naturale è anche detto **logaritmo neperiano** (dal loro inventore, il matematico Neper, o Napier, 1614).

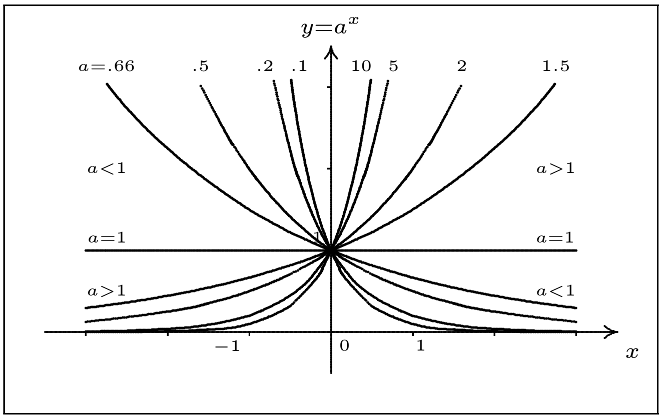


Fig. 3.8 - Le funzioni esponenziali di base a.

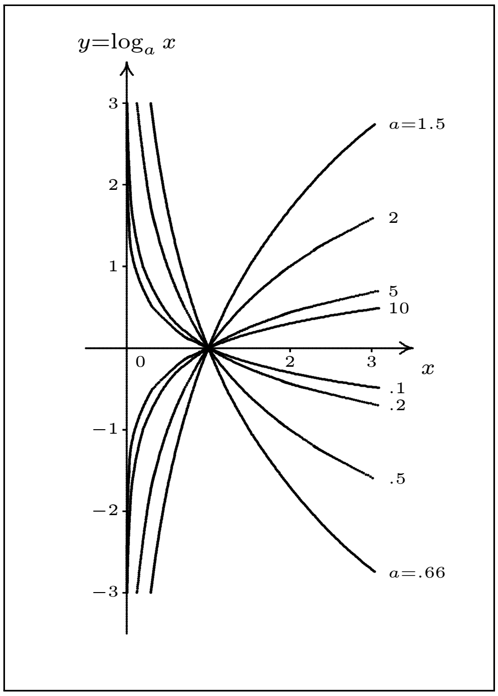


Fig. 3.9 - Le funzioni logaritmo in base a.

3.11 - Derivata logaritmica. Derivando la funzione composta $\log f(x)$ si trova

$$\big(\log f(x)\big)' = \frac{1}{f(x)}\, f'(x).$$

Di qui segue

$$\boxed{f' = f\,\big(\log f\big)'} \qquad (1)$$

cioè: *la derivata di una funzione si può ottenere moltiplicando la stessa funzione per la derivata del suo logaritmo.*

Questa regola si rivela risolutiva per il calcolo di alcune derivate "impossibili" (cioè non calcolabili con le solite regole di derivazione, né tantomeno con il limite del rapporto incrementale). Un esempio notevole è il seguente.

$\boxed{\text{E}}$ Calcolo della derivata di una funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$:

$$\big(f^g\big)' = f^g\,\big(\log f^g\big)' = f^g\,\big(g\,\log f\big)' = f^g\,\big(g'\,\log f + g\,\tfrac{1}{f} f'\big).$$

Quindi

$$\boxed{\big(f^g\big)' = f^g\,g'\,\log f + f^{g-1}\,g\,f'} \qquad (2)$$

$\boxed{\text{E}}$ Rientra nel caso precedente la derivata della funzione x^x:

$$(x^x)' = x^x\,(\log x^x)' = x^x\,(x\log x)' = x^x(1+\log x).$$

$\boxed{!}$ Con la derivata logaritmica possiamo dimostrare che $(x^p)' = p\,x^{p-1}$, anche per p non intero (vedi §3.2):

$$(x^p)' = x^p\,(\log x^p)' = x^p\,(p\,\log x)' = p\,x^p\,\tfrac{1}{x} = p\,x^{p-1}.$$

3.12 - Funzioni iperboliche. Mediante la funzione esponenziale e^x si definiscono tre funzioni dette rispettivamente **seno iperbolico**, **coseno iperbolico** e **tangente iperbolica**:

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}} \tag{1}$$

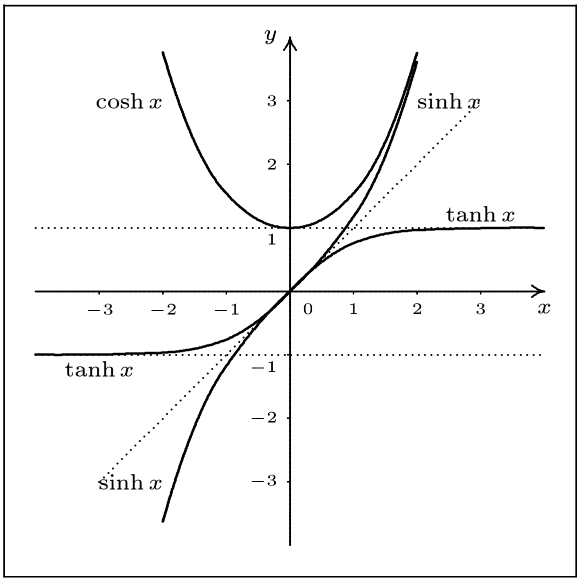


Fig. 3.10 - Le funzioni iperboliche.

Le loro principali proprietà, deducibili facilmente dalle (1), sono riassunte nel riquadro seguente:

$$\boxed{\begin{aligned} &\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ &\sinh(-x) = -\sinh(x) \\ &\cosh(-x) = \cosh(x) \\ &\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ &\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ &\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \\ &\cosh(2x) = 2 \cosh^2 x - 1 \end{aligned}} \tag{2}$$

Come si vede queste proprietà richiamano quelle delle funzioni circolari da cui derivano il nome.

Tutte queste funzioni hanno dominio $D = \mathbb{R}$, mentre la loro immagine è, nell'ordine con cui sono state definite, tutto $\mathbb{R}$, l'intervallo $[1, +\infty)$ e l'intervallo aperto $(-1, 1)$.

Le funzioni $\sinh x$ e $\tanh x$ sono monotòne crescenti e quindi possono essere invertite. Le loro inverse sono chiamate rispettivamente **settore seno iperbolico** ($\sinh^{-1} x$) e **settore tangente iperbolica** ($\tanh^{-1} x$). La funzione $\cosh x$ invece è monotòna strettamente crescente solo su $x \geq 0$. Pertanto con questa restrizione essa può essere invertita, e si ottiene la funzione **settore coseno iperbolico** ($\cosh^{-1} x$).

Si può dimostrare che esse possono essere espresse in termini della funzione logaritmo mediante le formule seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) & x \in \mathbb{R} \\ \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) & x \in [1, +\infty) \\ \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & x \in (-1, 1). \end{array}} \tag{3}$$

E Dalla loro definizione (1), tenuto conto che $(e^x)' = e^x$, possiamo calcolare facilmente le derivate delle funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \tfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})' = \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) = \cosh x \\ (\cosh x)' &= \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})' = \tfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) = \sinh x \\ (\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

Riassumiamo i risultati di questi ultimi paragrafi, completando le tabelle delle derivate fondamentali:

Tab. 5

Esponenziali e logaritmi	
$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ \log a$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ \log a} = \dfrac{\log_a e}{x}$

Tab. 6

Funzioni iperboliche	
$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

E Si dimostra, con una tecnica piuttosto raffinata detta *calcolo delle variazioni*, che una sottile catena (o un cavo perfettamente flessibile) sospesa fra due pali (o tralicci) e sottoposta alla gravità descrive in condizioni di equilibrio una curva, detta appunto **catenaria**, che è un arco di coseno iperbolico, cioè rappresentabile come grafico di una funzione del tipo $f(x) = a\tanh(bx)+c$, con a, b, c costanti opportune.

***

Esercizi. (a) Calcolare i seguenti limiti:

$\boxed{1}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1}{2x^4 - 1}$

$\boxed{2}$ $\lim_{x\to 0} \log\left(\dfrac{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1}{2x^4 - 1}\right)$

$\boxed{3}$ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1}{2x^5 + 2}$

$\boxed{4}$ $\lim_{x\to +\infty} \log\left(\dfrac{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1}{2x^5 + 2}\right)$

$\boxed{5}$ $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4 - 2x + 1}}{x^2 - 2}$

$\boxed{6}$ $\lim_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 4x^2 - 1}\right)$

$\boxed{7}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\sin^3 x}$

$\boxed{8}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x^2)}{x^2}$

$\boxed{9}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(x) - x}{\sin x}$

$\boxed{10}$ $\lim_{x\to \pm\infty} \exp\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x - 1}\right)$

$\boxed{11}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x\cos^2 x}{\sin x}$

(b) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$\boxed{12}$ $\dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)^2}$

$\boxed{13}$ $\dfrac{4-x}{x}e^x$

$\boxed{14}$ $\dfrac{e^{x^2-1}}{x}$

$\boxed{15}$ $\dfrac{1}{x}e^{\arctan x}$

$\boxed{16}$ $(2x^2 - 1)\cos(2x - 1)$

$\boxed{17}$ $\arcsin\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$

Capitolo 4

L'analisi delle funzioni

4.1 - La regola di De L'Hôpital. Cominciamo con due definizioni fondamentali. Una funzione $f(x)$ si dice **infinitesima** in a, o per $x \to a$ (x che tende ad a), se

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{1}$$

La $f(x)$ si dice invece **infinita** in a, o per $x \to a$, se invece

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty. \tag{2}$$

In entrambi i casi, a può essere o un numero (cioè un punto dell'asse x) appartenente o no al dominio di definizione di $f(x)$, oppure $\pm\infty$.

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime in a, oppure entrambe infinite, il limite del loro rapporto f/g per $x \to a$ presenta la forma indeterminata del tipo $0/0$ oppure del tipo ∞/∞. Possono allora aversi quattro casi:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, \\ \pm\infty, \\ \ell \neq 0, \\ \text{non esiste.} \end{cases}$$

Nel primo caso prevale l'infitesimo numeratore (o l'infinito a denominatore) e si dice che $f(x)$ è infinitesima di ordine superiore a $g(x)$ (o infinita di ordine inferiore a $g(x)$). Nel secondo prevale l'infinitesimo a denominatore (o l'infinito a numeratore), e si dice che $f(x)$ è infinitesima di ordine inferiore a $g(x)$ (o infinita di ordine superiore a $g(x)$). Nel terzo caso si dice che le due funzioni sono infinitesime (o infinite) dello stesso ordine. Nel quarto caso che le funzioni sono infinitesimi (o infiniti) non confrontabili. In alcuni testi non si fa distinzione tra il terzo ed il quarto caso, ritenendo gli infinitesimi o gli infiniti dello stesso ordine quando non si ha prevalenza né del numeratore né del denominatore, anche se il limite del rapporto non esiste.

Per "risolvere" questa indeterminazione si può ricorrere alla seguente

• **Regola di De L'Hôpital** (o di De L'Hôpital-Bernoulli). *Se le funzioni f e g sono derivabili in un intorno di a, dove la derivata di g non si annulla, e se sono entrambe infinitesime o entrambe infinite per $x \to a$, allora*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{3}$$

a condizione che il limite del rapporto delle derivate esista.

Esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

$\boxed{!}$ Se il limite del rapporto delle derivate presenta ancora un'indeterminazione dei due tipi indicati, la regola di L'Hôpital si può ripetere, purché le condizioni richieste alle funzioni siano soddisfatte anche dalle loro derivate, e così via. Si genera in questo modo una successione di uguaglianze, le quali però non possono dirsi "vere" fino a quando non si approda ad un limite esistente. Si noti bene, dunque, che l'uguaglianza (1) può non essere vera se il limite delle derivate non esiste: ci sono casi in cui il limite del rapporto delle funzioni esiste, ma non quello delle derivate.

$\boxed{\text{E}}$ Uno esempio in cui la regola "fallisce" (ma si giunge ugualmente a risolvere l'indeterminazione) è il seguente. Il limite del rapporto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

presenta la forma indeterminata ∞/∞. Il limite del rapporto delle derivate prime,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}=1+\lim_{x\to+\infty}\cos x,$$

non esiste. Però il limite del rapporto delle funzioni esiste, perché esso si sviluppa nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Dunque l'uguaglianza (3) in questo caso <u>non</u> <u>è</u> <u>vera</u>, perché il limite del secondo membro non esiste.

$\boxed{\text{E}}$ Applicando la regola di L'Hôpital possiamo dimostrare i seguenti limiti notevoli:

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0, & \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^p}=0\quad (p>0), & \lim_{x\to 0+}x^p\log x=0\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty, & \lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0\quad (n\in\mathbb{N})\\
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1
\end{array}\tag{4}$$

Dalla seconda e terza riga si nota la *debolezza del logaritmo* e la *forza dell'esponenziale* di fronte alle "potenze" della x. Si vede infatti che a $+\infty$ il logaritmo è un infinito più debole di ogni potenza (positiva) della x, ecc.

4.2 - Altri tipi di forme indeterminate. Altri tipi di forme indeterminate si possono ricondurre a quelle ora viste, ed applicare quindi la regola di L'Hôpital.

• Tipo $0 \cdot \infty$. Si incontra calcolando il limite di un prodotto fg dove f è infinitesima e g infinita. Si considera allora il limite del quoziente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

che presenta l'indeterminazione del tipo $0/0$, oppure il limite del quoziente

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

che invece presenta l'indeterminazione del tipo ∞/∞.

• Tipo $\infty - \infty$. Si incontra calcolando il limite di una differenza $f - g$ dove f e g tendono entrambe a $+\infty$ (o a $-\infty$). Si studia allora il limite del prodotto

$$f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

e si cerca innanzitutto di risolvere l'indeterminazione del limite del quoziente g/f. Se il questo limite è 1 si ricade nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$. In questo caso si considera il rapporto

$$\frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

che presenta la forma indeterminata $0/0$.

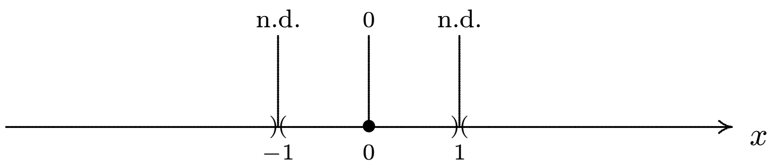
• Tipi 1^∞, 0^0, ∞^0. Si presentano nel caso di limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$. Si possono risolvere calcolando il limite del logaritmo, che ci riconduce sempre al tipo $0 \cdot \infty$.

4.3 - Zeri e segno di una funzione. Il primo passo nell'analisi di una funzione $f(x)$ definita da un'espressione analitica, cioè da una formula (in certi casi anche da più formule) consiste nella determinazione del suo campo di esistenza, cioè dell'insieme dei punti x dove tale formula ha significato ed ammette un risultato. Il secondo passo è l'analisi del **segno** (positivo o negativo) che la funzione assume nei vari intervalli in cui è definita. Siccome nelle applicazioni ordinarie abbiamo a che fare con funzioni continue, gli intervalli in cui una funzione ha segno costante sono delimitati dai suoi <u>zeri</u> (che, come si è già detto, si determinano risolvendo l'equazione $f(x) = 0$) e dai punti in cui la funzione non è definita. Infatti, una funzione continua in un intervallo, per cambiare di segno <u>deve</u> necessariamente annullarsi (il suo diagramma deve intersecare o toccare l'asse x). Una volta segnati gli zeri e i punti di non definizione sull'asse x, si passa a determinare il segno della funzione in ognuno degli intervalli delimitati da tali punti. Questo può farsi discutendo opportunamente il comportamento della funzione, oppure più semplicemente calcolando la funzione in un punto prescelto in ognuno degli intervalli. Il tutto può essere riassunto in un particolare schema (o diagramma), come illustrato negli esempi seguenti.

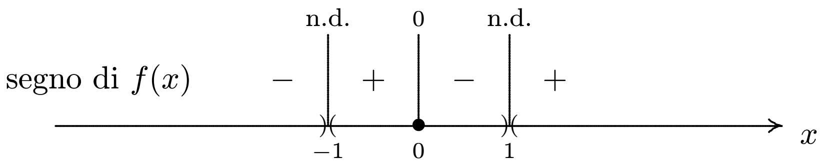
$\boxed{\text{E}}$ Studiare il segno della funzione

$$f(x) = x\,\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

La funzione ha un solo zero in $x = 0$ e due soli punti dove non è definita, $x = \pm 1$. Tracciamoli sull'asse x:



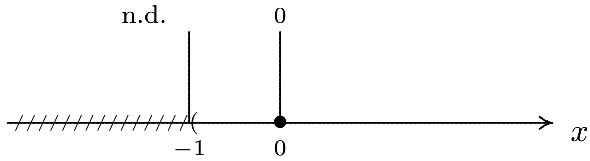
Abbiamo allora quattro intervalli aperti in cui esaminare il segno della funzione. Lo facciamo studiando la funzione separatamente in ognuno di essi. Per $x > 1$, si ha $x^2 - 1 > 0$, il numeratore $x^2 + 1$ è sempre positivo, quindi $f(x) > 0$. Per $0 < x < 1$, il denominatore è negativo, quindi $f(x) < 0$, ecc. Man mano che si procede nella discussione si riporta il segno della funzione nei vari intervalli. Alla fine otteniamo lo schema seguente:



$\boxed{\text{E}}$ Studiare il segno della funzione

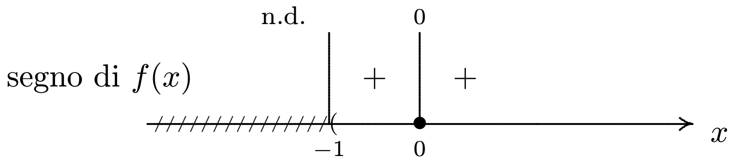
$$f(x) = x\,\log(x+1).$$

La funzione ha un solo zero per $x = 0$, dove si annulla anche $\log(x+1)$, e non è definita per $x + 1 \leq 0$, quindi per $x \leq -1$:



Abbiamo ora due intervalli in cui discutere il segno. Possiamo questa volta procedere assegnando alla x un valore in ognuno di questi. Per esempio: per $x = 1$

abbiamo $f(1) = \log 2 > 0$; per $x = -\frac{1}{2}$ abbiamo $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 2 > 0$. Quindi:



4.4 - Punti stazionari (o critici), crescenza/decrescenza. La derivata di una funzione rappresenta, punto per punto, il suo tasso di crescita, che può essere positivo, negativo o nullo. Osserviamo che se la funzione è strettamente crescente (decrescente), allora il suo rapporto incrementale è sempre positivo (negativo); di conseguenza il suo limite è positivo o nullo (negativo o nullo): si ricordi che, nel passaggio al limite, le disuguaglianze si attenuano. Concludiamo quindi che:

• *Se una funzione è crescente (decrescente) in un intervallo in cui è derivabile, allora la sua derivata è positiva (negativa) o nulla. Se è costante, la sua derivata è identicamente nulla.*

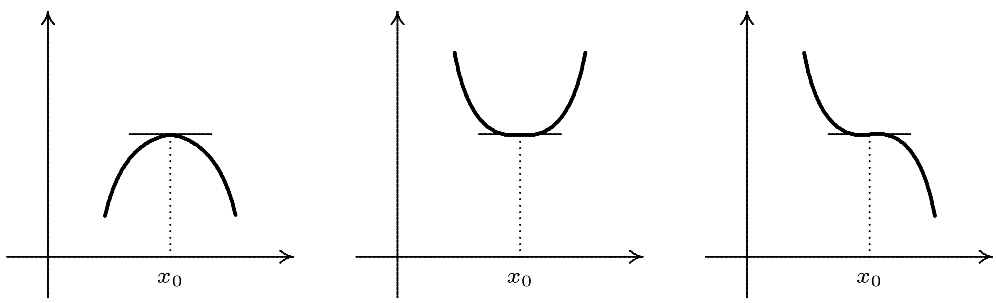
Un esempio in cui la funzione, pur essendo strettamente crescente, ha dei punti in cui la derivata si annulla è dato dalla funzione $f(x) = x^3$: nell'origine ($x = 0$) la tangente al grafico è orizzontale.

È importante il fatto che le proprietà ora viste si possono invertire, purché si consideri la funzione in un intervallo, eventualmente ristretto rispetto al suo campo di definizione. Si può infatti dimostrare che:

• *Se in un intervallo aperto I la derivata $f'(x)$ è sempre positiva (risp. negativa, nulla), allora in quell'intervallo la funzione $f(x)$ è crescente (risp. decrescente, costante).*

I punti in cui la derivata è nulla si dicono **punti stazionari** o **punti critici** della funzione: sono quelli in cui la tangente al grafico è orizzontale. Si dimostra che:

• *Se la funzione $f(x)$ è definita in un intervallo aperto I e se in un punto $x_0 \in I$ ha derivata nulla, $f'(x_0) = 0$, allora in quel punto la funzione ha un massimo/minimo locale, oppure un* **flesso orizzontale**.



Pertanto, nelle applicazioni più comuni, i massimi/minimi locali di una funzione $f(x)$ definita in un intevallo aperto I vanno ricercati:

[1] tra gli <u>zeri</u> della sua derivata $f'(x)$, cioè tra i punti che risolvono l'equazione

$$f'(x) = 0;$$

[2] negli estremi degli intervalli di definizione della $f(x)$ (quando, ovviamente, tali estremi appartegono agli intervalli stessi);

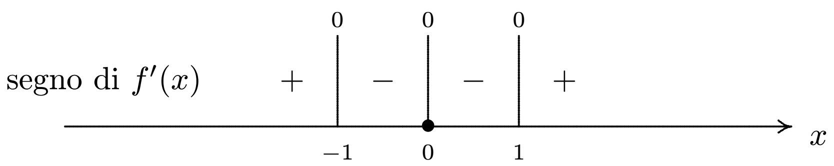
[3] nei punti in cui non è derivabile.

$\boxed{\text{E}}$ Questi casi sono messi in evidenza, per esempio, dal grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (vedi Fig. 2.5). Questa ha derivata nulla (tangente orizzontale) per $x = 0$, dove ha un massimo locale (che è anche, in questo caso, massimo globale). Ha poi due minimi locali (che sono, in questo caso, anche globali) agli estremi del campo di definizione, $x = \pm 1$. Si noti che in questo esempio nei due minimi locali la funzione non è derivabile (la tangente è verticale).

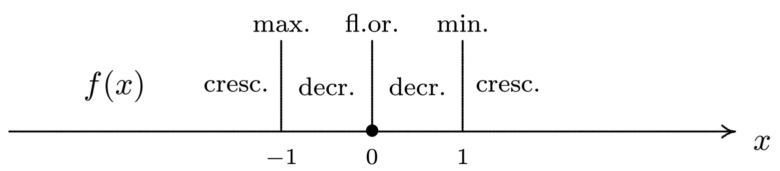
Nel caso [1], per ogni punto stazionario x_* (in cui cioè si ha $f'(x_*) = 0$) occorre studiare il segno della derivata nell'intorno di x_*. Se in un intorno sinistro di x_* si ha $f'(x) > 0$ e in un intorno destro si ha $f'(x) < 0$, significa che a sinistra la funzione è crescente e a destra è decrescente: dunque x_* è un punto di massimo locale. Viceversa se $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro e $f'(x) > 0$ in un intorno destro, allora si ha un minimo locale. Infine se in un intorno bilaterale di x_* la derivata $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno (eccetto in x_*, dove è nulla) si ha un flesso orizzontale.

Se però, come quasi sempre accade nelle applicazioni più comuni, anche la derivata prima $f'(x)$ è continua in ogni intervallo in cui è definita, basta determinare il suo segno in ognuno di questi, per classificare i vari punti di stazionarietà. Si procede allora in maniera analoga a quanto visto per lo studio del segno di una funzione.

$\boxed{\text{E}}$ Studiare i punti stazionari della funzione $f(x) = \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{3}\,x^3$. La funzione è un polinomio, quindi definita su tutto $\mathbb{R}$. La sua derivata è $f'(x) = x^4 - x^2 = x^2\,(x^2 - 1)$. Studiando il suo segno si arriva allo schema seguente:



Tradotto il segno in termini di crescenza/decrescenza e punti stazionari di $f(x)$, abbiamo:



Il grafico della funzione è infatti il seguente:

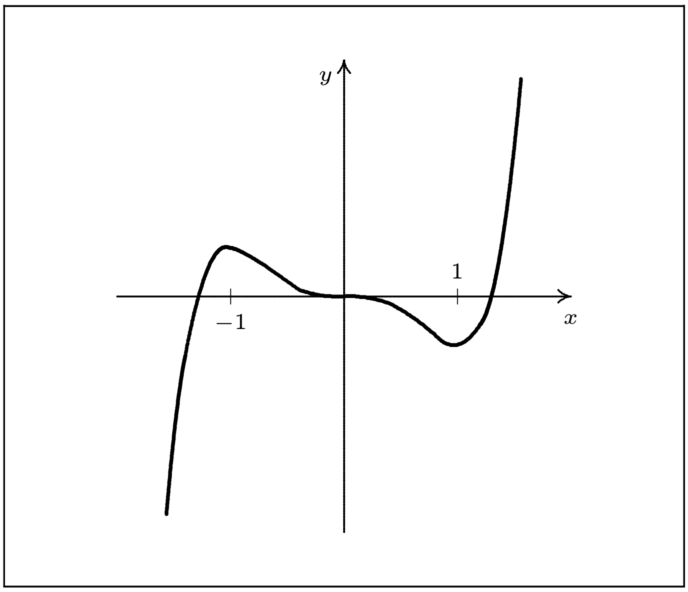


Fig. 4.1 - Esempio di funzione con min/max locali e flesso orizzontale.

4.5 - Asintoti. Un **asintoto** di una funzione $f(x)$ è una retta, di equazione $y = mx+q$, a cui il grafico si "avvicina indefinitamente" quando $x \to +\infty$ (asintoto **destro**) o $x \to -\infty$ (asintoto **sinistro**), nel senso che *la differenza tra* $f(x)$ *e la funzione lineare* $mx + q$ *tende a zero per* $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - (mx + q)\big] = 0 \tag{1}$$

(consideriamo per semplicità solo il caso $x \to +\infty$; per $x \to -\infty$ tutto si ripete in maniera analoga). Un asintoto si dice **orizzontale** quando $m = 0$, **obliquo** se $m \neq 0$.

Si noti bene che in questa definizione è compreso il caso in cui il grafico della funzione interseca infinite volte l'asintoto. Un esempio è dato dalla funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$: per $x \to \pm\infty$ ammette come asintoto orizzontale l'asse x (vedi Fig. 2.10).

I numeri (m, q) caratteristici di un asintoto sono determinati, <u>nell'ordine</u>, dalle formule:

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \\ q &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] \end{aligned}} \tag{2}$$

Infatti dalla condizione asintotica (2) segue, dividendo per x,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

per cui la prima delle (2) è dimostrata. Determinato m, sempre dalla (1) segue immediatamente la seconda delle (2). Si noti che, nel caso in cui il primo limite (2) presenta la forma indeterminata del tipo ∞/∞ e la regola di L'Hôpital è applicabile, il coefficiente angolare dell'asintoto si calcola col limite della derivata:

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} f'(x)} \tag{3}$$

Oltre che asintoti obliqui ed orizzontali, una funzione $f(x)$ può avere **asintoti verticali**. Si ha un asintoto verticale di equazione $x = x_0$ quando

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty \tag{6}$$

con x_0 appartenente o no al dominio di definizione di $f(x)$. Una tale situazione è, ad esempio, rappresentata nella Fig. 4.2, dove per $x \to x_0+$ la funzione tende a $-\infty$, mentre per $x \to x_0-$ tende a $+\infty$. Si ha in questo caso un asintoto verticale **bilaterale** $x = x_0$. La funzione presenta inoltre un asintoto orizzontale sinistro $y = q$ (per $x \to -\infty$) e un asintoto obliquo destro $y = mx + q$ (per $x \to +\infty$).

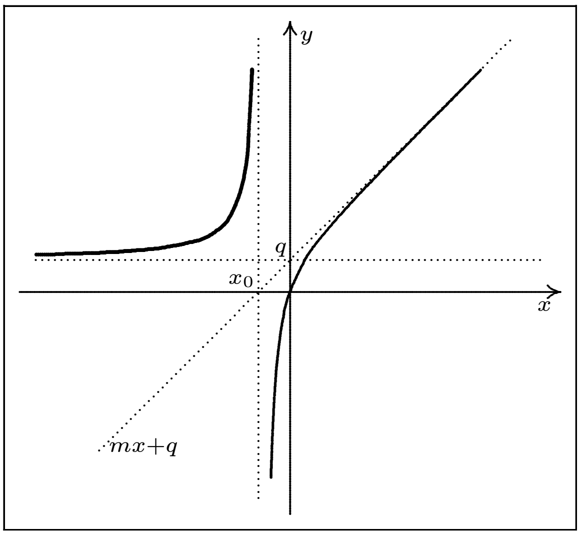


Fig. 4.2 - Asintoti.

4.6 - Concavità/convessità e flessi. Mentre il segno della derivata prima $f'(x)$ fornisce informazioni sulla crescenza o decrescenza di una funzione $f(x)$ in un intervallo I, il segno della derivata seconda $f''(x)$ fornisce invece indicazioni sulla **convessità** o **concavità** della funzione nell'intervallo stesso. Infatti, se è $f''(x) > 0$ allora la derivata prima $f'(x)$ è crescente: ciò significa che la tangente al grafico aumenta il suo coefficiente angolare al crescere di x. Si dice in questo caso che la funzione è **convessa**. Se invece nell'intervallo è sempre $f''(x) < 0$, allora la tangente diminuisce ilsuo coefficiente angolare al crescere di x e la funzione si dice **concava**. Gli attributi "convessa" e "concava" si sottintendono dal basso, nel senso che il grafico della funzione presenta la convessità o la concavità se osservato dal basso (vedi Fig. 4.3).

Data una funzione $f(x)$ diciamo che in un punto x_0 del suo dominio di definizione ha un **flesso** se in un intorno destro ed in un intorno sinistro di x_0 (escluso x_0) la derivata seconda è non nulla e assume segni opposti. Quindi in un punto di flesso la funzione "cambia di concavità": da concava diviene convessa o viceversa. Osserviamo inoltre che, in questo contesto:

[1] se la derivata seconda è continua, allora nel flesso si ha $f''(x_0) = 0$;

[2] se inoltre anche $f'(x_0) = 0$, allora si ha un **flesso orizzontale** (la tangente al grafico in quel punto è orizzontale);

[3] se invece $f'(x_0) \neq 0$ si ha un **flesso obliquo**;

[4] se infine in x_0 la funzione non è derivabile, perché il limite del rapporto incrementale non è finito, allora si ha un **flesso verticale** (la tangente al grafico in quel punto è verticale).

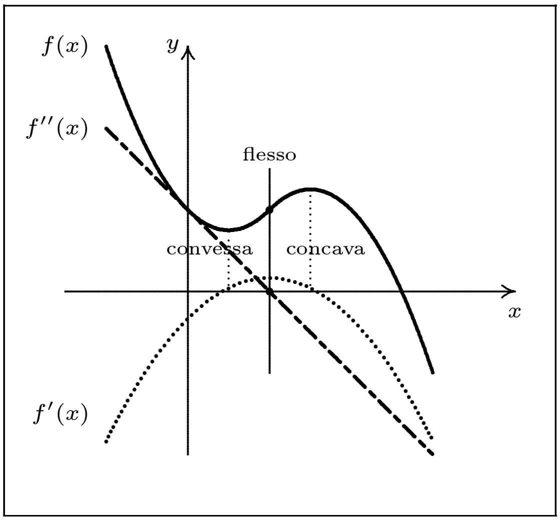


Fig. 4.3 - Intervalli di convessità e concavità di una funzione

E Nella Fig. 4.3 è rappresentato il grafico della funzione

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3,$$

insieme a quelli di $f'(x) = -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2$ (curva a punti) e $f''(x) = 1 - x$ (curva a punti e tratti). L'analisi simultanea di questi tre grafici illustra le relazioni tra i concetti ora visti (concavità, convessità, punti di flesso, massimi, minimi) e il segno o l'annullarsi di queste funzioni: la funzione possiede un minimo in $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, un massimo in $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ e un flesso obliquo in $x = 1$.

E Un esempio tipico di flesso verticale si ha nell'origine per la funzione $\sqrt[3]{x}$ (vedi Fig. 2.31). Infatti, essendo $f''(x) = -\frac{2}{9}\,x^{-5/3}$, la derivata seconda è positiva a sinistra dell'origine e negativa a destra, ma la funzione ha nell'origine un punto a tangente verticale.

E **La gaussiana**. Di particolare interesse per la teoria della probabilità e statistica è la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

È detta **densità della distribuzione normale di Gauss** (1777-1855). Le prime due derivate valgono

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, (x^2 - 1)\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La derivata prima è nulla nell'origine, negativa per $x > 0$, positiva per $x < 0$. La derivata seconda si annulla nei punti $x = \pm 1$, è negativa al loro interno, positiva all'esterno. Per quanto visto sopra, segue che in $x = 0$ si ha un massimo locale (in questo caso anche assoluto) e in $x = \pm 1$ due flessi obliqui. La conferma si ha dal suo grafico rappresentato nella Fig. 4.4.

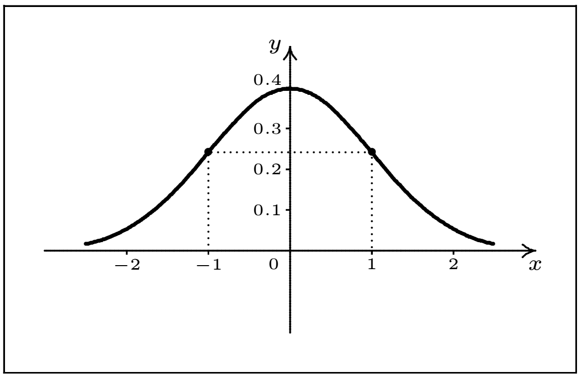
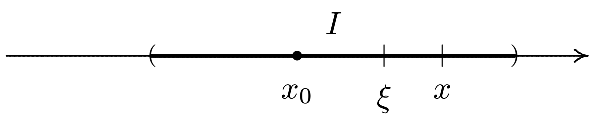


Fig. 4.4 - La densità di distribuzione normale di Gauss.

4.7 - La formula di Taylor/McLaurin. Una delle più importanti applicazioni del calcolo delle derivate è data dal seguente teorema:

• *Se una funzione $f(x)$ ammette in un intorno I di x_0 le derivate fino alla $f^{(n+1)}(x)$ allora, per ogni $x \in I$ distinto da x_0, esiste un punto ξ, compreso tra x e x_0 e da questi distinto, tale da far valere l'uguaglianza*

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \tfrac{1}{2}\, f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3!}\, f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots \\ + \tfrac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n + \tfrac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}} \tag{1}$$



Quest'uguaglianza prende il nome di **formula di Taylor** *di ordine n centrata nel punto x_0 con* **resto di Lagrange**..

Secondo la formula di Taylor la funzione $f(x)$ risulta decomposta nella somma

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)} \tag{2}$$

di un polinomio $P_n(x)$ di grado n in $(x - x_0)$ (quindi in x)

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\, (x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n \end{aligned}} \tag{3}$$

i cui coefficienti sono determinati dai valori delle derivate successive della funzione in x_0, e di un **resto n–esimo** del tipo

$$\boxed{R_n(x) = \tfrac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\, (x-x_0)^{n+1}} \tag{4}$$

detto appunto **resto di Lagrange**, dove ξ è un punto compreso tra x e x_0 e diverso da questi. Nelle applicazioni di questa formula non ha interesse conoscere il punto ξ (che potrebbe anche non essere unico). È importante sapere che esiste. Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ la formula di Taylor si riduce alla cosiddetta **formula di Mac Laurin** (1698-1746):

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2}\, f''(0)\,x^2 + \dots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)\,x^n + \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,x^{n+1}} \tag{5}$$

4.8 - Approssimazione polinomiale delle funzioni. La formula di Taylor o quella di Mac Laurin trovano notevoli applicazioni nella teoria dell'approssimazione polinomiale delle funzioni. Nella formula di Taylor osserviamo che il resto R_n è tanto più "piccolo" quanto più:

(i) n è "grande", perché il fattoriale di n cresce rapidamente,

(ii) $f^{(n+1)}$ è "piccola" nell'intorno di x_0,

(iii) $x - x_0$ è "piccolo" (cioè x è "vicino" a x_0).

Quando queste condizioni sono verificate ed è anche possibile dare una **stima del resto**, si può approssimare la funzione $f(x)$ con il polinomio P_n:

$$f(x) \simeq P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k.$$

Nel caso si consideri l'intorno dell'origine ($x_0 = 0$), e quindi la formula di Mac Laurin, si ha

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}\, f^{(k)}(0)\, x^k.$$

$\boxed{\text{E}}$

Si può stimare il resto attraverso opportune maggiorazioni. L'errore che si commette calcolando la funzione in $x \in I$ è dato da $|f(x) - P_n(x)|$ e quindi, grazie alla formula di Taylor, da

$$|R_n(x)| = \tfrac{1}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \cdot |x - x_0|^{n+1},$$

con ξ compreso tra x_0 e x. Siccome il valore $(x - x_0)^{n+1}$ è facilmente calcolabile, resta il problema di stimare la quantità $f^{(n+1)}(\xi)$. Una possibile stima può essere ottenuta dalla seguente maggiorazione

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq \sup_{s \in I} |f^{(n+1)}(s)|, \tag{1}$$

si calcola cioè l'estremo superiore dei valori della derivata $(n+1)$–esima per tutti i punti $s \in I$.

E **Calcolo della funzione esponenziale** e^x **nell'intorno di** $x = 0$. Sappiamo che la funzione e^x coincide con tutte le sue successive derivate e che nell'origine vale 1. Dunque, applicando la formula di Mac Laurin si trova:

$$e^x \simeq 1 + x + \tfrac{1}{2}\, x^2 + \tfrac{1}{6}\, x^3 + \ldots + \tfrac{1}{n!}\, x^n.$$

Questa è la serie già determinata per altra via al §3.8.

Il resto, quindi la differenza tra e^x e questo polinomio, è

$$R_n(x) = \tfrac{1}{(n+1)!}\, e^{\xi}\, x^{n+1},$$

con ξ numero opportuno compreso tra 0 ed x. Si osservi che questa quantità è piccola se si sta abbastanza vicini allo zero, perché, in questo caso, il termine e^{ξ} non si discosta molto da 1. Si tenga inoltre anche conto della rapida crescita del fattoriale al crescere di n. Si osservi ancora che ponendo $x = 1$ si trova la formula per il calcolo del numero e:

$$e \simeq 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \ldots + \tfrac{1}{n!}.$$

Applicando la maggiorazione (1) segue che nell'intervallo $[-1, 1]$ l'errore che si commette nell'uso di queste formule non supera il valore

$$\tfrac{e}{(n+1)!} < \tfrac{3}{(n+1)!},$$

ricordato che $e < 3$.

E **Calcolo della funzione** $\log(1+x)$ **nell'intorno di** $x = 0$. Per $f(x) = \log(1+x)$ si ha $f(0) = 0$ e per le derivate:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{1+x} &&\Rightarrow\quad f'(0) = 1\\
f''(x) &= \tfrac{-1}{(1+x)^2} &&\Rightarrow\quad f''(0) = -1\\
f'''(x) &= \tfrac{2}{(1+x)^3} &&\Rightarrow\quad f'''(0) = 2\\
f^{(4)}(x) &= \tfrac{-6}{(1+x)^4} &&\Rightarrow\quad f^{(4)}(0) = -6.
\end{aligned}$$

Pertanto le derivate successive nell'origine valgono

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\ (n-1)!$$

Di conseguenza otteniamo:

$$\log(1+x) \simeq x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\ \tfrac{x^n}{n}.$$

Una stima del resto, restringendoci al caso $x \geq 0$, sarà dunque

$$|R_n(x)| = \tfrac{1}{(n+1)!}\ \left|\tfrac{(-1)^n\ n!}{(1+\xi)^{n+1}}\ x^{n+1}\right| \leq \tfrac{1}{n+1}|x|^{n+1},$$

perché il massimo valore di $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$ è 1 in corrispondenza di $\xi = 0$.

Consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Osserviamo che $g(x) = f'(x)$ con $f(x) = \log(1+x)$. Possiamo utilizzare i calcoli fatti sopra per concludere che

$$g^{(n)}(0) = (-1)^n\ n!.$$

Di conseguenza otteniamo

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n.$$

Questa formula può essere utilizzata per calcolare l'inverso di $1+x$, per piccoli valori di x, mediante sole operazioni di prodotto e somma.

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo delle funzioni** $\sin x$ **e** $\cos x$ **nell'intorno di** 0. Se $f(x) = \sin x$, sapendo che $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, ecc., e che quindi le derivate pari del seno si annullano tutte nell'origine, mentre quelle dispari valgono alternativamente -1 e $+1$, si trova, arrestandosi per esempio dopo i primi tre termini non nulli:

$$\sin x \simeq x - \tfrac{1}{3!}\ x^3 + \tfrac{1}{5!}\ x^5.$$

Con un ragionamento analogo si trova:

$$\cos x \simeq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4.$$

Per entrambe queste funzioni la stima del resto è

$$|R_n(x)| \leq \tfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

perché sia il seno che il coseno sono in valore assoluto ≤ 1.

4.9 - Serie di Taylor/McLaurin. Le formule di Taylor e di McLaurin conducono in maniera spontanea al concetto di **serie di potenze** quando si pensi di non arrestarle al termine n-esimo, supposto che la funzione in esame possieda derivate di qualunque ordine in x_0. Data infatti una tale funzione $f(x)$, si può considerare la somma infinita

$$\boxed{T_{(f,x_0)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}\ f^{(n)}(x_0)\ (x-x_0)^n}$$

Questa prende il nome di **serie di Taylor** della funzione $f(x)$ nel punto x_0, oppure di **serie di Mac Laurin** nel caso $x_0 = 0$:

$$\boxed{T_{(f,0)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\, x^n}$$

Per ogni valore assegnato della x, la serie di Taylor (o quella di McLaurin) fornisce una serie numerica. Si pongono allora le seguenti domande:

(i) Per quali valori della x questa serie è convergente ?

(ii) Ammessa la convergenza, risulta $T_{(f,x_0)}(x) = f(x)$?

Una risposta è data dal teorema seguente:

• *Se per un prefissato x il resto di Lagrange è tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0, \tag{1}$$

allora la serie è convergente e converge a $f(x)$, vale cioè l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)\, (x - x_0)^n.$$

Infatti, per la formula di Taylor, la ridotta n-sima della serie è data da $P_n(x) = f(x) - R_n(x)$ e quindi, passando al limite, si ha $P_n(x) \to f(x)$ se vale la (1). Se questo accade per tutti i punti di un intorno di x_0 allora si dice che la funzione $f(x)$ è **sviluppabile in serie di Taylor** nell'intorno di x_0.

Dalle espressioni dei resti viste in precedenza segue che per l'esponenziale, il seno ed il coseno la condizione (1) è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi queste funzioni sono sviluppabili in serie di Mac Laurin e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Si tratta delle espressioni già anticipate al §2.17.

$\boxed{!}$ Si badi bene che ci sono casi in cui la serie di Taylor/McLaurin di una funzione $f(x)$ converge per ogni x ma <u>non</u> <u>converge</u> a $f(x)$. Un esempio tipico è dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

il cui grafico è:

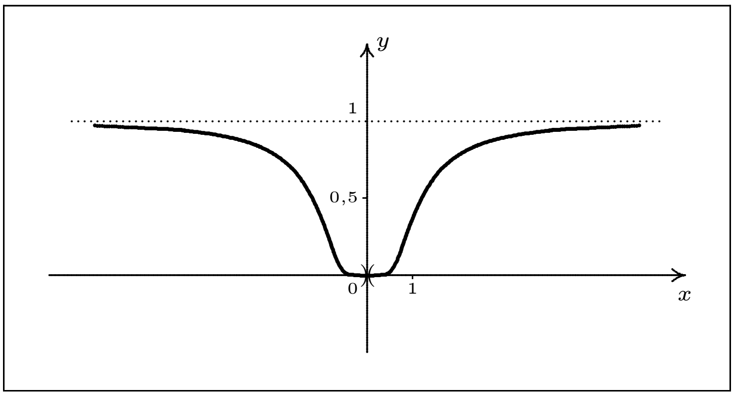


Fig. 4.6 - La funzione $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Si può dimostrare che questa funzione ammette tutte le derivate in $x_0 = 0$ e che queste sono tutte nulle. Pertanto la sua serie di McLaurin è identicamente nulla, anche se non lo è la funzione.

4.10 - Raggio di convergenza delle serie di potenze. La serie di Taylor è una serie di potenze di $x - x_0$, quindi riconducibile ad una **serie di potenze** della x, cioè del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n, \tag{1}$$

con a_n numeri reali. Serie di questo tipo intervengono in varie importanti questioni di analisi delle funzioni. Si può dimostrare che

• *Per una serie di potenze si distinguono tre casi:*

(i) la serie converge solo per $x = 0$,

(ii) la serie converge assolutamente (nel senso che converge la serie dei valori assoluti) per ogni x,

(iii) esiste un numero $\rho > 0$ tale che la serie è assolutamente convergente per $|x| < \rho$ e non convergente per $|x| > \rho$.

Il numero ρ si dice **raggio di convergenza** della serie. Nei primi due casi si pone rispettivamente $\rho = 0$ e $\rho = +\infty$. Per $|x| = \rho$ la serie può anche non risultare convergente.

Esistono vari metodi per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze. Uno dei più semplici è descritto dal seguente teorema

• *Se per $n \to +\infty$ il rapporto $|a_n/a_{n+1}|$ tende ad un limite ρ (finito o infinito), allora questo è il raggio di convergenza della serie* (1).

Per poter applicare questo teorema occorre che (almeno da un certo punto in poi) si abbia sempre $a_n \neq 0$. Questa condizione è soddisfatta, per esempio, dalla serie dell'esponenziale (e si vede, applicando il teorema, che $\rho = +\infty$). Non è invece soddisfatta dalle serie del seno e del coseno. La serie del coseno, per esempio, ha solo potenze pari; ciò significa che i coefficienti delle potenze dispari sono tutti nulli. Tuttavia, ponendo $u = x^2$ si ottiene una serie equivalente, nelle potenze di u, che ha tutti i coefficienti non nulli; allora il teorema è applicabile e si vede che anche per questa serie $\rho = +\infty$. Lo stesso artificio si applica alla serie del seno (2_2), dopo aver messo in evidenza x: il risultato è ancora $\rho = +\infty$.

Si può dimostrare il seguente importante teorema:

• *Data una serie di potenze di raggio di convergenza ρ, anche la* **serie derivata**, *ottenuta derivando ogni termine*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza e converge a $f'(x)$

Di conseguenza una serie di potenze definisce nel proprio intervallo di convergenza $|x| < \rho$ una funzione $f(x)$ indefinitamente derivabile.

$\boxed{\text{E}}$ Verificare le proprietà delle derivate delle funzioni esponenziale, seno e coseno, derivando termine a termine le loro serie.

4.11 - Calcolo degli zeri di una funzione. Il significato geometrico di derivata suggerisce un metodo molto efficace per il calcolo degli zeri di una funzione $f(x)$, vale a dire per risolvere un'equazione del tipo $f(x) = 0$: il **metodo di Newton** o **metodo delle tangenti**. Occorre innanzitutto individuare un intervallo chiuso $[a, b]$ nel quale la funzione sia derivabile e tale che agli estremi abbia segno opposto; per esempio:

$$f(a) > 0, \qquad f(b) < 0.$$

Siccome la funzione è continua (perché derivabile) per il Teorema di esistenza degli zeri si ha certamente uno zero x_0 interno all'intervallo. Si supponga inoltre che in detto intervallo la funzione sia strettamente decrescente e convessa. Una situazione di questo tipo è caratterizzata dalle condizioni

$$f'(x) < 0 \quad \text{(decrescenza)}, \qquad f''(x) > 0 \quad \text{(convessità)}.$$

Si noti che per la stretta decrescenza della funzione, il suo grafico ha una sola intersezione con l'asse x; quindi lo zero x_0 è unico nell'intervallo considerato (vedi Fig. 4.5).

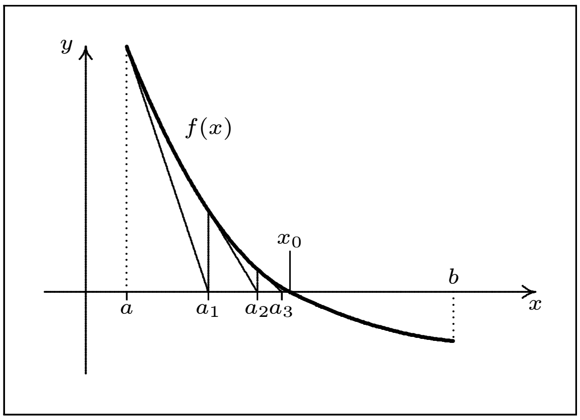


Fig. 4.7 - Il metodo di Newton.

Con queste premesse, si conduca la tangente al grafico dal suo estremo sinistro. Questa retta interseca l'asse x in un punto a_1 compreso tra a e x_0. Si consideri allora il punto del grafico di ascissa a_1, cioè il punto $\big(a_1, f(a_1)\big)$, e da questo si conduca ancora la tangente fino ad incontrare sull'asse x un secondo punto a_2, compreso tra a_1 e x_0. Ripetendo indefinitamente quest'operazione si individua una successione di punti $a,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ che è crescente e limitata, e che converge al punto x_0.

Tutto ciò può essere dimostrato rigorosamente sulla base dell'espressione analitica della successione. Per determinarla ritorniamo al primo passo della costruzione: la tangente all'estremo sinistro passa per il punto $\big(a, f(a)\big)$ ed ha coefficiente angolare $f'(a)$, quindi ha equazione

$$y - f(a) = f'(a)\ (x - a).$$

L'intersezione con l'asse x si ottiene ponendo $y = 0$ e $x = a_1$, per cui

$$-f(a) = f'(a)\ (a_1 - a).$$

Di qui, risolvendo per a_1, segue:

$$a_1 = a - \tfrac{f(a)}{f'(a)}.$$

Per l'individuazione del punto successivo a_2 vale una formula analoga:

$$a_2 = a_1 - \tfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

e così via. Dunque la successione a_n è derminata dalla formula iterativa

$$\boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}}$$

Si può dimostrare che, nelle ipotesi fatte sul segno della funzione e delle sue derivate, questa successione è monotòna crescente e limitata superiormente, quindi convergente allo zero x_0. In questo modo, con un numero opportuno di iterazioni, si calcola lo zero con un errore stimabile (esistono formule che forniscono quest'errore in base al numero n delle iterazioni).

Lo stesso metodo si applica in situazioni analoghe, combinando in tutti i modi possibili (quattro in tutto) la monotonia (crescenza o decrescenza) e la concavità o convessità, e partendo, a seconda dei casi, dall'estremo sinistro o destro del grafico della funzione, ottenendo di conseguenza successioni crescenti o decrescenti.

Se per esempio si considera la funzione $f(x) = x^2 - c$ con $c > 0$, essendo $f'(x) = 2x$, la formula iterativa diventa

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - c}{2a_n},$$

cioè

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right).$$

Lo zero x_0 di $f(x)$ è in questo caso tale che $x_0^2 = c$, cioè $x_0 = \pm\sqrt{c}$. Quindi, a seconda della scelta dell'intervallo e del punto iniziale, la successione convergerà a $\sqrt{c}$ o a $-\sqrt{c}$. Questa successione è già stata considerata al §1.9. In maniera analoga, la radice q-esima di un numero c si trova applicando lo stesso metodo alla funzione $f(x) = x^q - c$.

4.12 - Ordine di uno zero/infinitesimo/infinito. Come si è detto al §2.12, uno zero x_0 di una funzione $f(x)$ è detto **multiplo** quando in x_0 il grafico di $f(x)$ non solo interseca l'asse x ma ne è anche tangente. P.es. il grafico di Fig. 4.1 mostra che la funzione rappresentata, $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$, ha due zeri semplici ed uno zero multiplo nell'origine. È possibile "quantificare" la molteplicità di uno zero: uno zero x_0 si dice di **ordine** $p > 0$ se in x_0 si annullano la funzione $f(x)$ e tutte le sue derivate successive (ammesso che esistano) fino all'ordine $p-1$, con la derivata p-esima esclusa. Quindi, in particolare, uno zero è di ordine 1 (o **semplice**) se

$$f(x_0) = 0, \qquad f'(x_0) \neq 0.$$

È di ordine 2 (o **doppio**) se

$$f(x_0) = 0, \qquad f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) \neq 0.$$

E così via.

Esempi. (1) Una potenza $f(x) = x^p$, con $p \in \mathbb{N}$, ha uno zero d'ordine p nell'origine. Infatti le sue derivate, $f'(x) = px^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$, ..., $f^{(p)}(x) = p!$ si annullano tutte per $x = 0$, salvo la p-esima. (2) La funzione di Fig. 4.1, ha derivate $f'(x) = x^2(x^2-1)$, $f''(x) = 2x(2x^2-1)$, $f'''(x) = 12x - 2$. Essendo $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -2 \neq 0$, ha nell'origine uno zero di ordine 3. (3) La funzione di Fig. 4.6 ha uno zero di ordine $+\infty$ nell'origine, perché tutte le sue derivate sono nulle nell'origine.

È anche possibile quantificare infinitesimi ed infiniti di una funzione (§4.1). Si considerano gli infinitesimi o infiniti **campione** (detti anche **principali**) dati dalla seguente tabella:

	Infinitesimo campione	Infinito campione
$x \to x_0$	$x - x_0$	$\dfrac{1}{x - x_0}$
$x \to \pm\infty$	$\dfrac{1}{x}$	x

Si considerano allora le seguenti definizioni.

• **Ordine di un infinitesimo**. (i) Si dice che una funzione $f(x)$ è **infinitesima di ordine** p per $x \to x_0$ se $f(x)$ e la funzione $g(x) = (x - x_0)^p$ sono infinitesime dello stesso ordine, cioè se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = \ell \neq 0.$$

(ii) Si dice che una funzione $f(x)$ è **infinitesima di ordine** p per $x \to \pm\infty$ se $f(x)$ e la funzione $g(x) = \frac{1}{x^p}$ sono infinitesime dello stesso ordine, cioè se

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{1/x^p} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\, x^p = \ell \neq 0.$$

• **Ordine di un infinito**. (i) Si dice che una funzione $f(x)$ è **infinita di ordine** p per $x \to x_0$ se $f(x)$ e la funzione $g(x) = 1/(x-x_0)^p$ sono infinite dello stesso ordine, cioè se

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,(x-x_0)^p = \ell \neq 0.$$

(ii) Si dice che una funzione $f(x)$ è **infinita di ordine** p per $x \to \pm\infty$ se $f(x)$ e la funzione $g(x) = x^p$ sono infinite dello stesso ordine, cioè se

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^p} = \ell \neq 0.$$

È implicito in queste definizioni che deve intendersi $p > 0$.

Esempi. Dagli esempi visti al §4.1 osserviamo che: (1) $\sin x$ è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$. (2) $1-\cos x$ è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$. (3) Un polinomio di grado n è un infinito di ordine n per $x \to \pm\infty$.

***

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti:

$\boxed{1}$ $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-(x+1)}$

$\boxed{2}$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\log x}{x}$

$\boxed{3}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\log x}{x}$

$\boxed{4}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{\log(x^2+1)}$

$\boxed{5}$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+\frac{1}{x^2})}{\arctan(\frac{2}{x})}$

$\boxed{6}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2 \cos x}$

$\boxed{7}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x \sin x \cos x}$

Studiare le seguenti funzioni:

$\boxed{8}$ $f(x) = \log\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

$\boxed{9}$ $f(x) = x^2 e^{-(x+2)}$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{x}$

$\boxed{11}$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x}{1 - \cos x}}$

$\boxed{12}$ $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$

$\boxed{13}$ $f(x) = \exp\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$\boxed{14}$ $f(x) = \dfrac{|x-3|}{|x|-3}$

Esercizi svolti - Analisi delle funzioni

$\boxed{1}$ Si consideri la funzione definita a tratti su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Per quale valore di k la funzione è continua in $x = 0$?

(b) Per quale valore di k la funzione è derivabile in $x = 0$? Quanto vale $f'(0)$?

(c) Calcolare la derivata della funzione per $x \neq 0$.

(d) La derivata $f'(x)$ è continua nell'origine ?

(e) La funzione ammette asintoti ?

(f) Tra quali curve è compreso il grafico della funzione ?

***

(a) Nel calcolo del limite della $f(x)$ per $x \to 0$ occorre tener conto che, pur non esistendo il limite di $\sin^2 \frac{1}{x}$, questa funzione è limitata (tra 0 e 1) e quindi il suo prodotto per l'infinitesimo x^2 ha come limite 0. Risulta quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Per la continuità in $x = 0$ questo limite deve essere uguale a $f(0) = k$. Pertanto la continuità si ha per $k = 0$.

(b) Perché sia derivabile in $x = 0$ la funzione deve essere continua. Quindi per il punto precedente deve essere $k = 0$. Verifichiamo se per questo valore di k la derivata esiste veramente:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(0+h) - f(0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(h + h^2 \sin^2 \frac{1}{h}\big) = \lim_{h\to 0} \big(1 + h \sin^2 \frac{1}{h}\big) = 1$$

(sempre per il fatto che $\sin^2 \frac{1}{h}$, pur non avendo limite, è limitata). Conclusione: la funzione è derivabile nell'origine e la sua derivata vale 1.

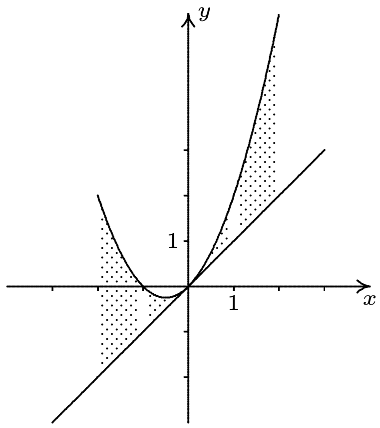
(c) Per $x \neq 0$ la derivata di $f(x)$ si calcola con le ordinarie regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2x \sin^2 \frac{1}{x} + x^2\, 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \,\big(-\frac{1}{x^2}\big) \\ &= 1 + 2x \sin^2 \frac{1}{x} - 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 1 + 2x \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

(d) Siccome il limite dell'ultimo addendo di $f'(x)$ non esiste, il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ non esiste, quindi la derivata prima non è continua in $x = 0$.

(e) Per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ il limite di $f(x)$ non esiste. Quindi la funzione non ammette asintoti (orizzontali o obliqui). Non esistono asintoti verticali, perché la funzione è definita e limitata su tutto $\mathbb{R}$.

(f) Siccome $\sin^2 \frac{1}{x}$ assume valori compresi tra 0 e 1 il grafico della funzione è compresa tra la retta $y = x$ e la parabola $y = x + x^2$, e oscilla infinite volte per $x \to 0$.



---

2 Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^4 - x^2)}{x^2}, & \text{per } x \neq 0 \\ -1, & \text{in } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$.

***

La funzione è continua in $x = 0$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$. Questo limite presenta la forma indeterminata $0/0$. Posso applicare il teorema dell'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^4 - x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{4x^3 - 2x}{1 + (x^4 - x^2)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 1}{1 + (x^4 - x^2)^2} = -1.$$

La funzione è continua.

---

3 Si studi la funzione

$$f(x) = \log \frac{x - 3}{x + 2}$$

(a) Qual è il campo di definizione ? - (b) ha degli zeri ? - (c) è iniettiva ? - (d) qual è l'insieme immagine - (e) ha degli asintoti ? - (f) tracciarne un grafico sommario.

***

(a) La funzione è definita per quei valori di x per cui la frazione ha senso (quindi $x \neq -2$) ed è positiva, quindi per quei valori per cui il numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. Da $x - 3 > 0$ e $x + 2 > 0$ segue $x > 3$. Da $x - 3 < 0$ e $x + 2 < 0$ segue $x < -2$. Il campo di definizione è quindi $D = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

(b) Si ha $f(x) = 0$ per $\frac{x-3}{x+2} = 1$, cioè $x - 3 = x + 2$, equazione mai soddisfatta. Non ci sono zeri.

(c) Calcolo la derivata:

$$f'(x) = \frac{x+2}{x-3}\frac{x+2-x+3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x-3)(x+2)}.$$

Non si annulla mai ed è sempre $f'(x) > 0$. La funzione è strettamente crescente, quindi iniettiva.

(d) La funzione assume tutti i valori reali escluso lo zero.

(e) Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del campo di definizione. Da

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

segue che l'asse delle x è un asintoto orizzontale. Da

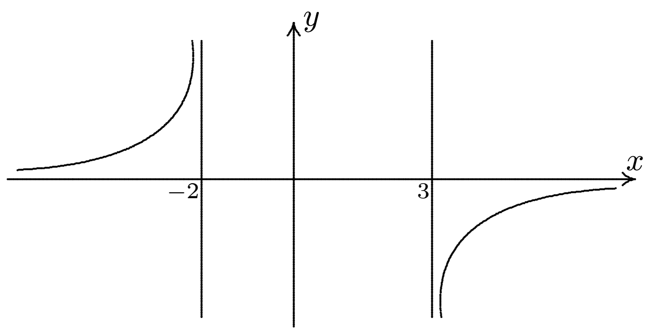
$$\lim_{x\to-2-} f(x) = +\infty$$

segue che $x = -2$ è un asinoto verticale. Da

$$\lim_{x\to3+} f(x) = -\infty$$

segue che $x = 3$ è un asinoto verticale.

(f) Siccome $f'(x) > 0$ ovunque, la funzione è strettamente crescente e non ci sono massimi e minimi all'interno del campo di definizione.



(g)

$\boxed{4}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1+\log x}{x}.$$

(a) Dominio di esistenza. (b) limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima e seconda. (d) Zeri, massimi, minimi, flessi. (e) Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 per il punto $x_0 = 1$.

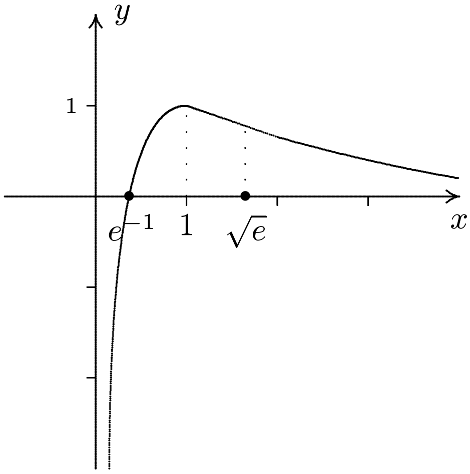
***

(a) Il dominio di esistenza è $(0,+\infty)$, perché $\log x$ è definito solo per $x > 0$, dove il denominatore è mai nullo.

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log x}{x} = 0$ perché $\log x$ è un infinito più debole di x (oppure applicare l'Hopital). $\lim_{x\to 0+} \frac{1+\log x}{x} = -\infty$ (il numeratore tende a $-\infty$, e $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$). Quindi l'asse x è un asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$) e l'asse y è un asintoto verticale.

(c) $f'(x) = -\frac{\log x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\log x - 1}{x^3}$.

(d) $f(x) = 0$ per $\log x = -1$, quindi per $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Si ha $f'(x) = 0$ per $\log x = 0$, cioè $x = 1$. Siccome $f''(1) = -1 < 0$, per $x = 1$ si ha un massimo locale e $f(1) = 1$. Si può anche osservare che $f'(x)$ è positiva a sinistra di 1 (quindi la $f(x)$ è crescente) e negativa a destra ($f(x)$ decrescente). Di qui segue anche che in $x = 1$ il massimo è assoluto. La funzione non è limitata inferiormente, quindi non possiede un minimo assoluto. Si ha $f''(x) = 0$ per $2\log x = 1$ quindi per $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Si tratta di un punto di flesso (obliquo).



(e) $P_2(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1+0+\frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

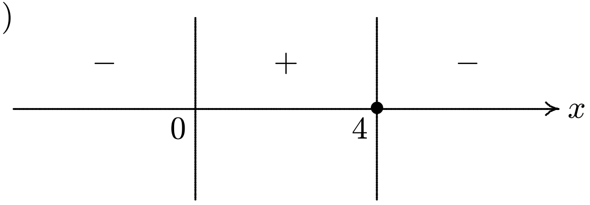
$\boxed{5}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x}\, e^x.$$

(a) Campo di esistenza, zeri e segno. (b) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima, crescenza, decrescenza, punti stazionari. (d) Derivata seconda, concavità e flessi. (e) Grafico sommario.

***

(a) La funzione esponenziale è definita su tutto $\mathbb{R}$, la frazione solo per $x \neq 0$. Dunque il c.d.e. della funzione è $D = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Siccome $e^x > 0$, si ha $f(x) = 0$ soltanto per $x = 4$ ed il segno di $f(x)$ coincide col segno della frazione $\frac{4-x}{x}$. I punti che delimitano i segni della funzione sono $x = 0$ e $x = 4$. Negli intervalli definiti da questi punti i segni sono dati dal diagramma seguente segno di $f(x)$



(b) Siccome la frazione tende a -1 per $x \to \pm\infty$, tenuto conto del noto andamento di e^x, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-.$$

Questo secondo limite mostra che l'asse x ($y = 0$) è asintoto orizzontale sinistro (cioè a $-\infty$). Siccome, applicando de l'Hopital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x}{x^2} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(4-x-1)e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty,$$

non si ha alcun asintoto obliquo a $+\infty$. Siccome la funzione e^x è continua, il suo limite per $x \to 0$ è uguale al suo valore $e^0 = 1$, e quindi risulta

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{4-x}{x} \quad \lim_{x\to\pm} e^x = \pm\infty$$

Questo mostra che l'asse y ($x = 0$) è asintoto verticale.

(c) Per il calcolo della derivata prima si può porre la funzione sotto la forma $f(x) = e^x \left(\frac{4}{x} - 1\right)$. Si ha successivamente:

$$f'(x) = e^x \left(\frac{4}{x} - 1\right) + e^x \left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2} \left(4x - x^2 - 4\right).$$

Siccome $e^x/x^2 > 0$, il segno di f' è quello del polinomio $4x - x^2 - 4$. Glizeri della funzione sono le radici di questo polinomio. le radici del polinomio di secondo grado che compare in quest'ultima espressione. Si osserva tuttavia subito (se non lo si osserva subito lo si deduce dal fatto che $\Delta = 0$) che è, a meno del segno, un quadrato perfetto: $-(x-2)^2$. Quindi

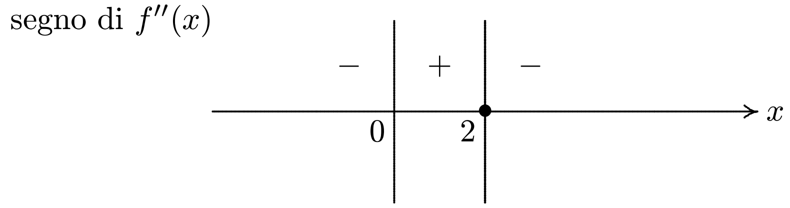
$$f'(x) = -e^x \left(\frac{x-2}{x}\right)^2.$$

Di qui si vede subito che $f'(x) = 0$ solo per $x = 2$ e che altrove è sempre $f'(x) < 0$. Si conclude che la funzione è sempre decrescente in ciascuno degli intervalli di definizione (N.B.:la funzione non è decrescente su tutto D, ma solo in ciascuno degli intervalli di definizione $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$). Segue che in $x = 2$ ha un flesso orizzontale. La funzione non ha massimi e minimi locali, né massimo e minimo assoluti perché non è limitata, né superiormente né inferiormente. Il valore della funzione nel punto stazionario (flesso or.) è $f(2) = e^2 \simeq 7,3$.

(d) Calcolo della derivata seconda:

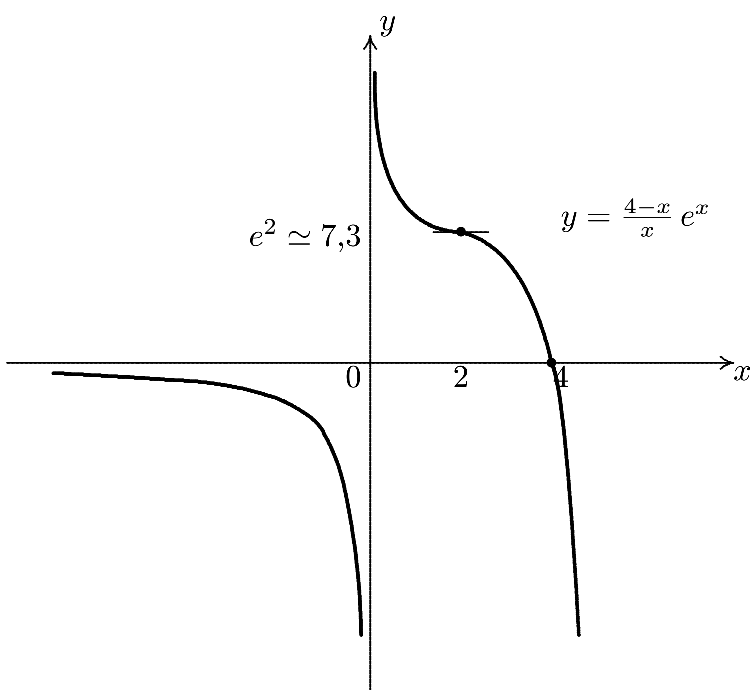
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\,e^x\,\left(\frac{(x-2)^2}{x^2} + 2\,\frac{x-2}{x}\,\frac{x-(x-2)}{x^2}\right) = -\,\frac{e^x}{x^3}\,\big(x(x-2)^2 + 4(x-2)\big)\\
&= -\,e^x\,\frac{x-2}{x^3}\,\big(x(x-2)+4\big) = e^x\,\frac{2-x}{x^3}\,\big(x^2-2x+4\big)
\end{aligned}
$$

Il polinomio tra parentesi ha $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$; non ha quindi zeri e siccome la potenza x^2 ha coefficiente positivo ($= 1$), rappresenta una parabola rivolta verso l'alto. Segue che questo polinomio è sempre positivo. Si conclude che, essendo $e^x > 0$, $f''(x) = 0$ solo per $x = 2$ mentre il suo segno è quello della frazione $\frac{2-x}{x^3}$:



La funzione è quindi convessa nell'intervallo $(0, 2)$, concava negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$. Inoltre, a conferma di quanto detto prima, ha un flesso orizzontale in $x = 2$.

(e) Il suo grafico sommario è quindi:



$\boxed{\mathbf{6}}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \log \frac{x}{1+x^2}.$$

(a) Campo di esistenza, zeri e segno. (b) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima, crescenza, decrescenza, punti stazionari. (d) Derivata seconda, concavità e flessi. (e) Grafico sommario.

***

(a) La funzione logaritmo è definita solo per valori positivi dell'argomento. Siccome è $1+x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, segue che la frazione è positiva per $x > 0$. Quindi la funzione è definita per ogni $x > 0$: $D = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Siccome la funzione logaritmo si annulla solo per il valore 1 del suo argomento, gli zeri della funzione soddisfano all'equazione

$$\frac{x}{1+x^2} = 1$$

equivalente all'equazione di secondo grado

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Siccome $\Delta = -3 < 0$, questa non ha soluzioni reali. Pertanto $f(x)$ non si annulla mai. Siccome è continua in un intervallo, avrà sempre lo stesso segno. Prendendo p.es. $x = 1$ si trova $f(1) = \log \frac{1}{2} < 0$. Dunque è $f(x) < 0$ sempre.

(b) Siccome la frazione (argomento del logaritmo) tende a 0 per $x \to 0+$ e per $x \to +\infty$, tenuto conto del noto andamento del logaritmo, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Il primo limite mostra che l'asse y ($x = 0$) è asintoto verticale. Per studiare l'esistenza di un eventuale asintoto a $+\infty$ conviene calcolare la derivata prima (vedi il punto seguente).

(c)
$$f'(x) = \frac{1+x^2}{x}\,\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}.$$

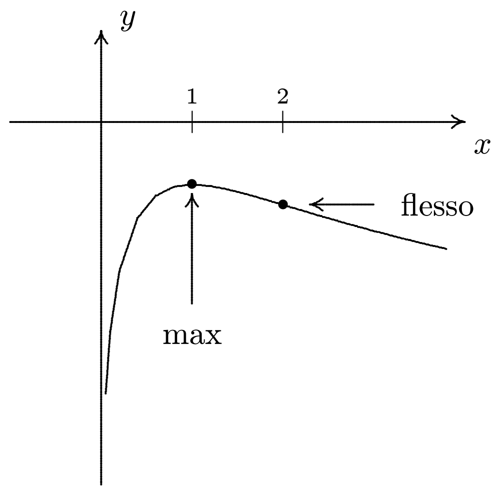
Si osserva che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0-$. Quindi un eventuale asintoto deve essere orizzontale ($m = 0$). Ma si è già visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; si conclude pertanto che non c'è asintoto a $+\infty$. La condizione di stazionarietà $f'(x) = 0$ è soddisfatta per $x^2 = 1$, quindi solo per $x = 1$ (essendo $x = -1$ fuori dal campo di esistenza). Siccome il denominatore di $f'(x)$ è sempre > 0, per $x \in (0, 1)$ si ha $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ funzione crescente, e per $x > 1$, $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ funzione decrescente. Il punto $x = 1$ è quindi di massimo, non solo locale ma assoluto, per la funzione: $f(1) = \log \frac{1}{2} = -\log 2 \simeq 0,69$.

(d)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2\,(1+x^2)^2}\left[-2x^2(1+x^2) - (1-x^2)(1+3x^2)\right] \\ &= \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^2(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ per $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, cioè per $x^2 = 2 \pm \sqrt{5}$, quindi solo per $x = \sqrt{2+\sqrt{5}} \simeq 2,05$. Questo valore di x è > 1, quindi nell'intervallo in cui $f'(x) < 0$. Pertanto questo punto è certamente non stazionario, quindi di flesso non orizzontale. A sinistra di questo punto è $x^4 - 4x^2 - 1 < 0$ quindi $f''(x) < 0$, e la funzione è concava (dal basso); a destra è convessa.

(e) Grafico sommario:



$\boxed{7}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x}.$$

(a) Campo di esistenza, zeri e segno. (b) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima e punti stazionari. (d) Derivata seconda e flessi. (e) Grafico sommario.

***

(a) $D = \mathbb{R} - \{0\}$. La funzione è dispari, $f(-x) = -f(x)$, quindi il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'origine. E' sufficiente studiare la funzione per $x > 0$. Non ci sono zeri, perché l'esponenziale è sempre positivo. Quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ (e $f(x) < 0$ per $x < 0$).

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (perché il limite dell'esponenziale è finito).

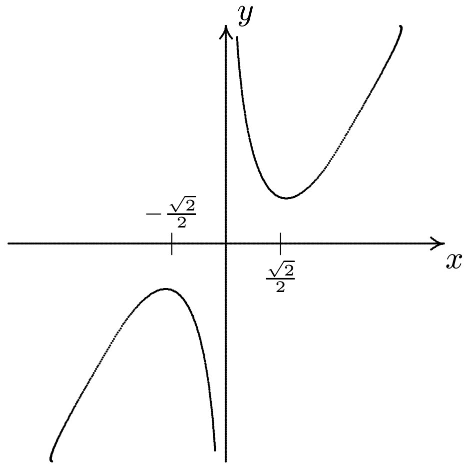
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (perché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore ad ogni potenza).

Asintoti: l'asse y è asintoto verticale. Non vi sono asintoti obliqui o orizzontali perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza).

(c) $f'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2}\, e^{x^2-1} = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2-1}$. Si ha $f'(x) = 0$ in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. In $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha un minimo locale, perché $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $f'(x) > 0$ per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $f''(x) = 2\,\dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3}\,e^{x^2-1}$. Il polinomio a numeratore non ha zeri, perché $\Delta = 1 - 8 < 0$. Dunque $f''(x)$ non si annulla mai e non ci sono flessi. In ciascuno degli intervalli di definizione la $f''(x)$ è continua e quindi ha sempre lo stesso segno. Per esempio, $f''(1) = (4-2+2)\cdot 1 > 0$; quindi $f''(x) > 0$ per $x > 0$ e la funzione è convessa (è concava per $x < 0$).

(e)



$\boxed{8}$ Studiare la funzione

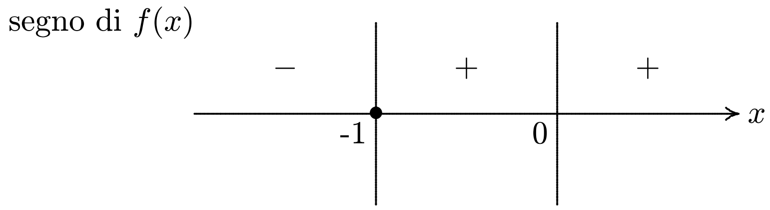
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

(a) Campo di esistenza. (b) Zeri e segno. (c) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (d) Derivata prima, crescenza e decrescenza, punti stazionari. (e) Grafico sommario.

***

(a) La funzione non è definita dove il denominatore si annulla, cioè per $x = 0$. Dunque $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) La funzione si annulla solo per $x = -1$. Siccome la funzione è continua, i punti che delimitano i segni della funzione sono $x = 0$ (non definita) e $x = -1$ (zero). In ciascuno dei 3 intervalli definiti da questi punti assume segno costante. Siccome il denominatore è sempre positivo, il segno è determinato dal numeratore. Siccome è una potenza dispari di $x+1$, il segno della funzione è in definitiva il segno di $x+1$. Ne risulta il diagramma seguente:



(c) Per le proprietà dei limiti delle funzioni razionali, risulta

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \\ \lim_{x\to 0\pm} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

Questo secondo limite mostra che l'asse y è asintoto verticale. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo, osserviamo che

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3} = 1,$$

e

$$q = \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - mx\big] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3 - x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+1}{x^2} = 3.$$

Gli stessi limiti valgono per $x \to -\infty$. Si conclude pertanto che la retta $y = x + 3$ è asintonto obliquo per $x \to \pm\infty$.

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^4}\big[3(x+1)^2x^2 - 2x(x+1)^3\big] = \frac{(x+1)^2}{x^3}\,[3x - 2(x+1)] \\ &= \frac{(x+1)^2\,(x-2)}{x^3} \end{aligned}$$

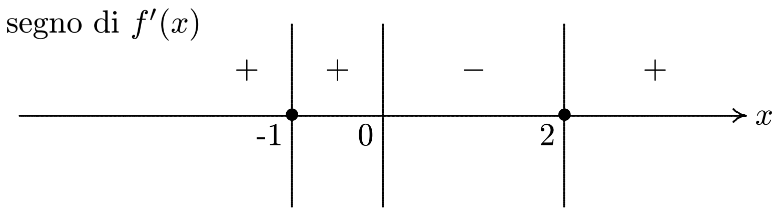
Gli zeri di $f'(x)$, cioè i punti stazionari di $f(x)$, sono pertanto

$$\begin{cases} x = -1 & \text{zero doppio,} \\ x = 2 & \text{zero semplice} \end{cases}$$

Il segno della derivata prima è costante in ciascuno degli intervalli delimitati dai punti $x = -1$ (zero), $x = 0$ (non definita) e $x = 2$ (zero). Dividendo per il fattore sempre positivo $(x+1)^2/x^2$, il segno di $f'(x)$ è quello della frazione

$$\frac{x-2}{x}$$

Ne risulta il diagramma seguente

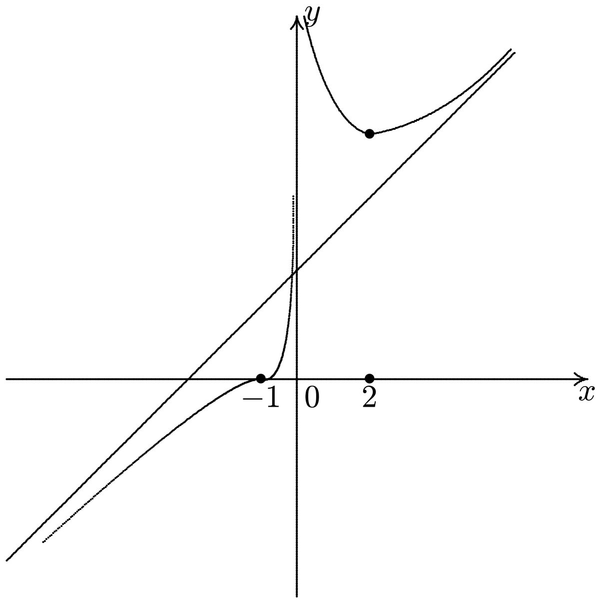


dal quale si deduce che: (1) La funzione è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Quindi il punto stazionario $x = -1$ è un flesso orizzontale. (2) La funzione è decrescente in $(0, 2)$ e crescente in $(2, +\infty)$. Quindi il punto stazionario $x = 2$ è di minimo locale. La funzione non è limitata, quindi non ha massimo e minimo assoluti.

Il valore del minimo locale è

$$f(2) = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4} = 6.75$$

(e) Grafico sommario:



Temi d'esame svolti - 1

(29.10.03)

Analisi delle funzioni

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si consideri la funzione definita a tratti su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Per quale valore di k la funzione è continua in $x = 0$?

(b) Per quale valore di k la funzione è derivabile in $x = 0$? Quanto vale $f'(0)$?

(c) Calcolare la derivata della funzione per $x \neq 0$.

(d) La derivata $f'(x)$ è continua nell'origine ?

(e) La funzione ammette asintoti ?

(f) Tra quali curve è compreso il grafico della funzione ?

***

(a) Nel calcolo del limite della $f(x)$ per $x \to 0$ occorre tener conto che, pur non esistendo il limite di $\sin^2 \frac{1}{x}$, questa funzione è limitata (tra 0 e 1) e quindi il suo prodotto per l'infinitesimo x^2 ha come limite 0. Risulta quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Per la continuità in $x = 0$ questo limite deve essere uguale a $f(0) = k$. Pertanto la continuità si ha per $k = 0$.

(b) Perché sia derivabile in $x = 0$ la funzione deve essere continua. Quindi per il punto precedente deve essere $k = 0$. Verifichiamo se per questo valore di k la derivata esiste veramente:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(0+h) - f(0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(h + h^2 \sin^2 \frac{1}{h}\big) = \lim_{h\to 0} \big(1 + h \sin^2 \frac{1}{h}\big) = 1$$

(sempre per il fatto che $\sin^2 \frac{1}{h}$, pur non avendo limite, è limitata). Conclusione: la funzione è derivabile nell'origine e la sua derivata vale 1.

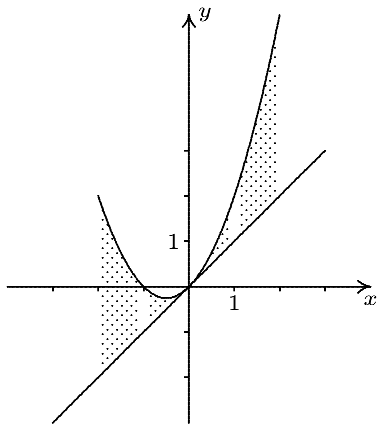
(c) Per $x \neq 0$ la derivata di $f(x)$ si calcola con le ordinarie regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2x \sin^2 \frac{1}{x} + x^2\, 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \big(-\frac{1}{x^2}\big) \\ &= 1 + 2x \sin^2 \frac{1}{x} - 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 1 + 2x \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

(d) Siccome il limite dell'ultimo addendo di $f'(x)$ non esiste, il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ non esiste, quindi la derivata prima non è continua in $x = 0$.

(e) Per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ il limite di $f(x)$ non esiste. Quindi la funzione non ammette asintoti (orizzontali o obliqui). Non esistono asintoti verticali, perché la funzione è definita e limitata su tutto $\mathbb{R}$.

(f) Siccome $\sin^2 \frac{1}{x}$ assume valori compresi tra 0 e 1 il grafico della funzione è compresa tra la retta $y = x$ e la parabola $y = x + x^2$, e oscilla infinite volte per $x \to 0$.



$\boxed{2}$ Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^4 - x^2)}{x^2}, & \text{per } x \neq 0 \\ -1, & \text{in } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$.

***

La funzione è continua in $x = 0$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$. Questo limite presenta la forma indeterminata $0/0$. Posso applicare il teorema dell'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^4 - x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{4x^3 - 2x}{1 + (x^4 - x^2)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 1}{1 + (x^4 - x^2)^2} = -1.$$

La funzione è continua.

$\boxed{3}$ Si studi la funzione

$$f(x) = \log \frac{x - 3}{x + 2}$$

(a) Qual è il campo di definizione ? - (b) ha degli zeri ? - (c) è iniettiva ? - (d) qual è l'insieme immagine - (e) ha degli asintoti ? - (f) tracciarne un grafico sommario.

***

(a) La funzione è definita per quei valori di x per cui la frazione ha senso (quindi $x \neq -2$) ed è positiva, quindi per quei valori per cui il numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. Da $x-3>0$ e $x+2>0$ segue $x>3$. Da $x-3<0$ e $x+2<0$ segue $x<-2$. Il campo di definizione è quindi $D=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

(b) Si ha $f(x)=0$ per $\frac{x-3}{x+2}=1$, cioè $x-3=x+2$, equazione mai soddisfatta. Non ci sono zeri.

(c) Calcolo la derivata:

$$f'(x)=\frac{x+2}{x-3}\frac{x+2-x+3}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x-3)(x+2)}.$$

Non si annulla mai ed è sempre $f'(x)>0$. La funzione è strettamente crescente, quindi iniettiva.

(d) La funzione assume tutti i valori reali escluso lo zero.

(e) Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del campo di definizione. Da

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

segue che l'asse delle x è un asintoto orizzontale. Da

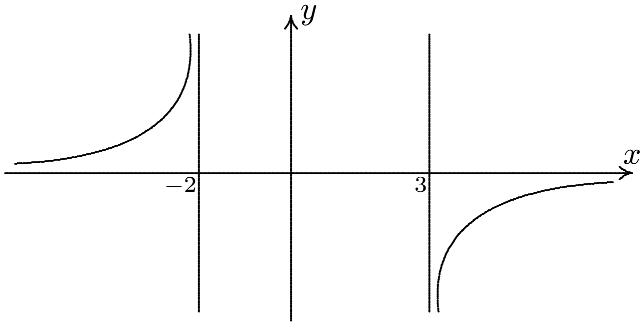
$$\lim_{x\to-2-} f(x)=+\infty$$

segue che $x=-2$ è un asinoto verticale. Da

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=-\infty$$

segue che $x=3$ è un asinoto verticale.

(f) Siccome $f'(x)>0$ ovunque, la funzione è strettamente crescente e non ci sono massimi e minimi all'interno del campo di definizione.



(g)

$\boxed{4}$ Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{1+\log x}{x}.$$

(a) Dominio di esistenza. (b) limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima e seconda. (d) Zeri, massimi, minimi, flessi. (e) Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 per il punto $x_0=1$.

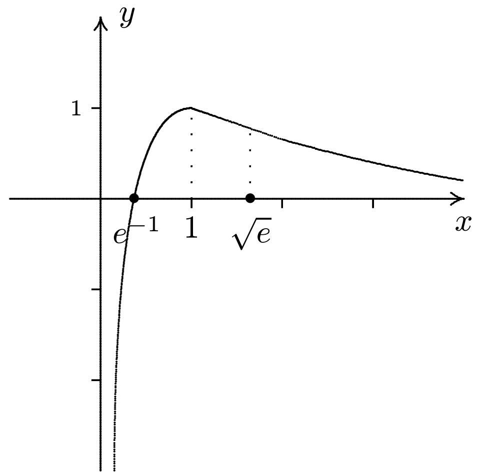
***

(a) Il dominio di esistenza è $(0, +\infty)$, perché $\log x$ è definito solo per $x > 0$, dove il denominatore è mai nullo.

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log x}{x} = 0$ perché $\log x$ è un infinito più debole di x (oppure applicare l'Hopital). $\lim_{x\to 0+} \frac{1+\log x}{x} = -\infty$ (il numeratore tende a $-\infty$, e $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$). Quindi l'asse x è un asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$) e l'asse y è un asintoto verticale.

(c) $f'(x) = -\frac{\log x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\log x - 1}{x^3}$.

(d) $f(x) = 0$ per $\log x = -1$, quindi per $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Si ha $f'(x) = 0$ per $\log x = 0$, cioè $x = 1$. Siccome $f''(1) = -1 < 0$, per $x = 1$ si ha un massimo locale e $f(1) = 1$. Si può anche osservare che $f'(x)$ è positiva a sinistra di 1 (quindi la $f(x)$ è crescente) e negativa a destra ($f(x)$ decrescente). Di qui segue anche che in $x = 1$ il massimo è assoluto. La funzione non è limitata inferiormente, quindi non possiede un minimo assoluto. Si ha $f''(x) = 0$ per $2\log x = 1$ quindi per $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Si tratta di un punto di flesso (obliquo).



(e) $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1 + 0 + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$.

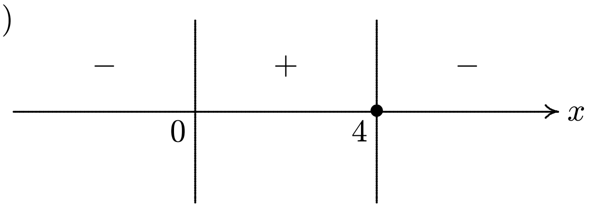
$\boxed{\mathbf{5}}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x}\, e^x.$$

(a) Campo di esistenza, zeri e segno. (b) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima, crescenza, decrescenza, punti stazionari. (d) Derivata seconda, concavità e flessi. (e) Grafico sommario.

***

(a) La funzione esponenziale è definita su tutto $\mathbb{R}$, la frazione solo per $x \neq 0$. Dunque il c.d.e. della funzione è $D = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Siccome $e^x > 0$, si ha $f(x) = 0$ soltanto per $x = 4$ ed il segno di $f(x)$ coincide col segno della frazione $\frac{4-x}{x}$. I punti che delimitano i segni della funzione sono $x = 0$ e $x = 4$. Negli intervalli definiti da questi punti i segni sono dati dal diagramma seguente segno di $f(x)$



(b) Siccome la frazione tende a -1 per $x \to \pm\infty$, tenuto conto del noto andamento di e^x, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-.$$

Questo secondo limite mostra che l'asse x ($y = 0$) è asintoto orizzontale sinistro (cioè a $-\infty$). Siccome, applicando de l'Hopital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x}{x^2} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(4-x-1)e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty,$$

non si ha alcun asintoto obliquo a $+\infty$. Siccome la funzione e^x è continua, il suo limite per $x \to 0$ è uguale al suo valore $e^0 = 1$, e quindi risulta

$$\lim_{x\to0\pm} f(x) = \lim_{x\to0\pm} \frac{4-x}{x} \lim_{x\to\pm} e^x = \pm\infty$$

Questo mostra che l'asse y ($x = 0$) è asintoto verticale.

(c) Per il calcolo della derivata prima si può porre la funzione sotto la forma $f(x) = e^x \left(\frac{4}{x} - 1\right)$. Si ha successivamente:

$$f'(x) = e^x \left(\frac{4}{x} - 1\right) + e^x \left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2} \left(4x - x^2 - 4\right).$$

Siccome $e^x/x^2 > 0$, il segno di f' è quello del polinomio $4x - x^2 - 4$. Glizeri della funzione sono le radici di questo polinomio. le radici del polinomio di secondo grado che compare in quest'ultima espressione. Si osserva tuttavia subito (se non lo si osserva subito lo si deduce dal fatto che $\Delta = 0$) che è, a meno del segno, un quadrato perfetto: $-(x-2)^2$. Quindi

$$f'(x) = -e^x \left(\frac{x-2}{x}\right)^2.$$

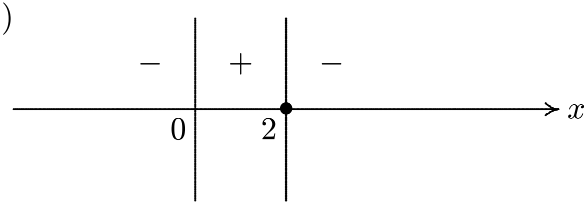
Di qui si vede subito che $f'(x) = 0$ solo per $x = 2$ e che altrove è sempre $f'(x) < 0$. Si conclude che la funzione è sempre decrescente in ciascuno degli intervalli di definizione (N.B.:la funzione non è decrescente su tutto D, ma solo in ciascuno degli intervalli di definizione $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$). Segue che in $x = 2$ ha un flesso orizzontale. La funzione non ha massimi e minimi locali, né massimo e minimo assoluti perché non è limitata, né superiormente né inferiormente. Il valore della funzione nel punto stazionario (flesso or.) è $f(2) = e^2 \simeq 7,3$.

(d) Calcolo della derivata seconda:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\,e^x \left(\frac{(x-2)^2}{x^2} + 2\,\frac{x-2}{x}\,\frac{x-(x-2)}{x^2} \right) = -\,\frac{e^x}{x^3}\,\big(x(x-2)^2 + 4(x-2)\big) \\
&= -\,e^x\,\frac{x-2}{x^3}\,(x(x-2)+4) = e^x\,\frac{2-x}{x^3}\,\big(x^2-2x+4\big)
\end{aligned}
$$

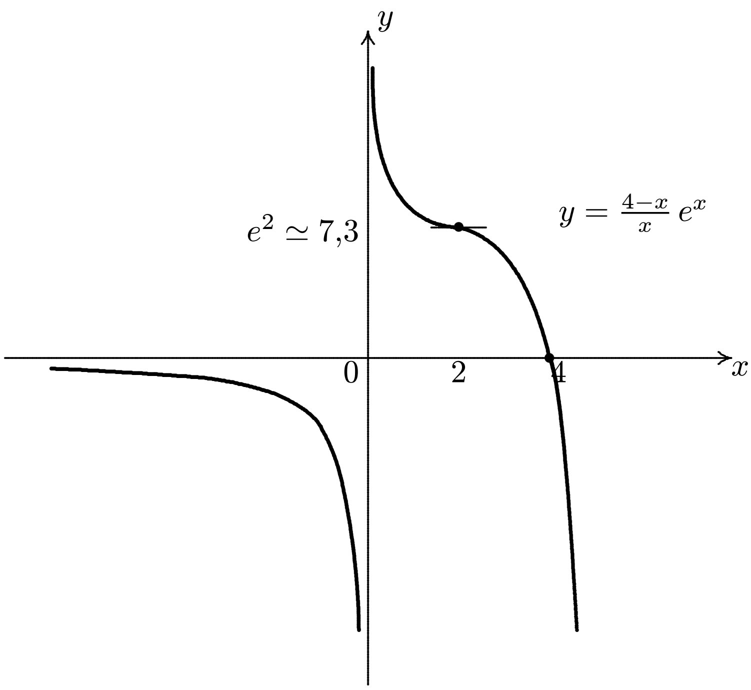
Il polinomio tra parentesi ha $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$; non ha quindi zeri e siccome la potenza x^2 ha coefficiente positivo $(= 1)$, rappresenta una parabola rivolta verso l'alto. Segue che questo polinomio è sempre positivo. Si conclude che, essendo $e^x > 0$, $f''(x) = 0$ solo per $x = 2$ mentre il suo segno è quello della frazione $\frac{2-x}{x^3}$:

segno di $f''(x)$



La funzione è quindi convessa nell'intervallo $(0, 2)$, concava negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$. Inoltre, a conferma di quanto detto prima, ha un flesso orizzontale in $x = 2$.

(e) Il suo grafico sommario è quindi:



$\boxed{\mathbf{6}}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \log \frac{x}{1+x^2}.$$

(a) Campo di esistenza, zeri e segno. (b) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima, crescenza, decrescenza, punti stazionari. (d) Derivata seconda, concavità e flessi. (e) Grafico sommario.

***

(a) La funzione logaritmo è definita solo per valori positivi dell'argomento. Siccome è $1+x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, segue che la frazione è positiva per $x > 0$. Quindi la funzione è definita per ogni $x > 0$: $D = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Siccome la funzione logaritmo si annulla solo per il valore 1 del suo argomento, gli zeri della funzione soddisfano all'equazione

$$\frac{x}{1+x^2} = 1$$

equivalente all'equazione di secondo grado

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Siccome $\Delta = -3 < 0$, questa non ha soluzioni reali. Pertanto $f(x)$ non si annulla mai. Siccome è continua in un intervallo, avrà sempre lo stesso segno. Prendendo p.es. $x = 1$ si trova $f(1) = \log \frac{1}{2} < 0$. Dunque è $f(x) < 0$ sempre.

(b) Siccome la frazione (argomento del logaritmo) tende a 0 per $x \to 0+$ e per $x \to +\infty$, tenuto conto del noto andamento del logaritmo, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Il primo limite mostra che l'asse y $(x = 0)$ è asintoto verticale. Per studiare l'esistenza di un eventuale asintoto a $+\infty$ conviene calcolare la derivata prima (vedi il punto seguente).

(c)
$$f'(x) = \frac{1+x^2}{x} \, \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}.$$

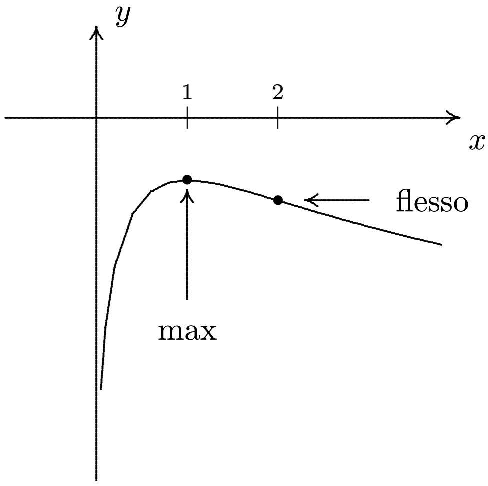
Si osserva che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0-$. Quindi un eventuale asintoto deve essere orizzontale $(m = 0)$. Ma si è già visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; si conclude pertanto che non c'è asintoto a $+\infty$. La condizione di stazionarietà $f'(x) = 0$ è soddisfatta per $x^2 = 1$, quindi solo per $x = 1$ (essendo $x = -1$ fuori dal campo di esistenza). Siccome il denominatore di $f'(x)$ è sempre > 0, per $x \in (0, 1)$ si ha $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ funzione crescente, e per $x > 1$, $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ funzione decrescente. Il punto $x = 1$ è quindi di massimo, non solo locale ma assoluto, per la funzione: $f(1) = \log \frac{1}{2} = -\log 2 \simeq 0,69$.

(d)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2\,(1+x^2)^2} \left[-2x^2(1+x^2) - (1-x^2)(1+3x^2) \right] \\ &= \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^2(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ per $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, cioè per $x^2 = 2 \pm \sqrt{5}$, quindi solo per $x = \sqrt{2+\sqrt{5}} \simeq 2,05$. Questo valore di x è > 1, quindi nell'intervallo in cui $f'(x) < 0$. Pertanto questo punto è certamente non stazionario, quindi di flesso non orizzontale. A sinistra di questo punto è $x^4 - 4x^2 - 1 < 0$ quindi $f''(x) < 0$, e la funzione è concava (dal basso); a destra è convessa.

(e) Grafico sommario:



$\boxed{7}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x}.$$

(a) Campo di esistenza, zeri e segno. (b) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (c) Derivata prima e punti stazionari. (d) Derivata seconda e flessi. (e) Grafico sommario.

***

(a) $D = \mathbb{R} - \{0\}$. La funzione è dispari, $f(-x) = -f(x)$, quindi il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'origine. E' sufficiente studiare la funzione per $x > 0$. Non ci sono zeri, perché l'esponenziale è sempre positivo. Quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ (e $f(x) < 0$ per $x < 0$).

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (perché il limite dell'esponenziale è finito).

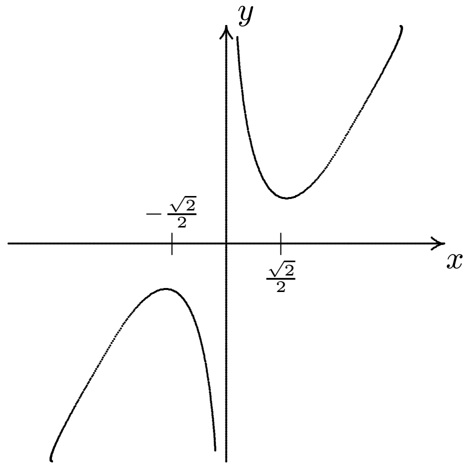
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (perché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore ad ogni potenza).

Asintoti: l'asse y è asintoto verticale. Non vi sono asintoti obliqui o orizzontali perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza).

(c) $f'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2}\, e^{x^2-1} = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2-1}$. Si ha $f'(x) = 0$ in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. In $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha un minimo locale, perché $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $f'(x) > 0$ per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $f''(x) = 2\,\dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3}\,e^{x^2-1}$. Il polinomio a numeratore non ha zeri, perché $\Delta = 1 - 8 < 0$. Dunque $f''(x)$ non si annulla mai e non ci sono flessi. In ciascuno degli intervalli di definizione la $f''(x)$ è continua e quindi ha sempre lo stesso segno. Per esempio, $f''(1) = (4-2+2)\cdot 1 > 0$; quindi $f''(x) > 0$ per $x > 0$ e la funzione è convessa (è concava per $x < 0$).

(e)



$\boxed{8}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

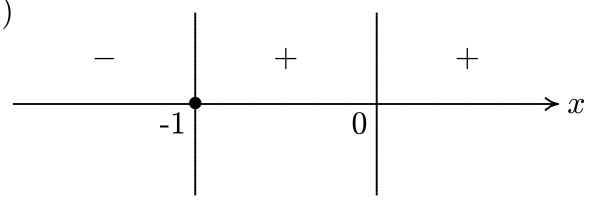
(a) Campo di esistenza. (b) Zeri e segno. (c) Limiti agli estremi del c.d.e. e asintoti. (d) Derivata prima, crescenza e decrescenza, punti stazionari. (e) Grafico sommario.

***

(a) La funzione non è definita dove il denominatore si annulla, cioè per $x = 0$. Dunque $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) La funzione si annulla solo per $x = -1$. Siccome la funzione è continua, i punti che delimitano i segni della funzione sono $x = 0$ (non definita) e $x = -1$ (zero). In ciascuno dei 3 intervalli definiti da questi punti assume segno costante. Siccome il denominatore è sempre positivo, il segno è determinato dal numeratore. Siccome è una potenza dispari di $x+1$, il segno della funzione è in definitiva il segno di $x+1$. Ne risulta il diagramma seguente:

segno di $f(x)$



(c) Per le proprietà dei limiti delle funzioni razionali, risulta

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \\ \lim_{x\to 0\pm} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

Questo secondo limite mostra che l'asse y è asintoto verticale. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo, osserviamo che

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3} = 1,$$

e

$$q = \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - mx\big] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3 - x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+1}{x^2} = 3.$$

Gli stessi limiti valgono per $x \to -\infty$. Si conclude pertanto che la retta $y = x + 3$ è asintonto obliquo per $x \to \pm\infty$.

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^4}\left[3(x+1)^2x^2 - 2x(x+1)^3\right] = \frac{(x+1)^2}{x^3}\,[3x - 2(x+1)] \\ &= \frac{(x+1)^2\,(x-2)}{x^3} \end{aligned}$$

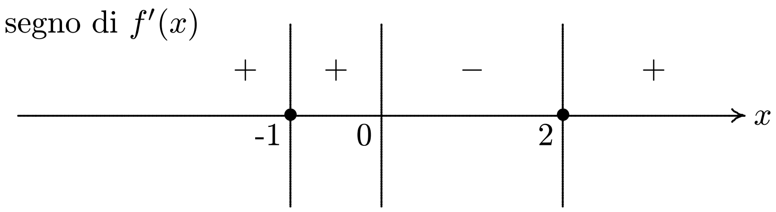
Gli zeri di $f'(x)$, cioè i punti stazionari di $f(x)$, sono pertanto

$$\begin{cases} x = -1 & \text{zero doppio,} \\ x = 2 & \text{zero semplice} \end{cases}$$

Il segno della derivata prima è costante in ciascuno degli intervalli delimitati dai punti $x = -1$ (zero), $x = 0$ (non definita) e $x = 2$ (zero). Dividendo per il fattore sempre positivo $(x+1)^2/x^2$, il segno di $f'(x)$ è quello della frazione

$$\frac{x-2}{x}$$

Ne risulta il diagramma seguente



dal quale si deduce che: (1) La funzione è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Quindi il punto stazionario $x = -1$ è un flesso orizzontale. (2) La funzione è decrescente in $(0, 2)$ e crescente in $(2, +\infty)$. Quindi il punto stazionario $x = 2$ è di minimo locale. La funzione non è limitata, quindi non ha massimo e minimo assoluti.

Il valore del minimo locale è

$$f(2) = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4} = 6.75$$

(e) Grafico sommario: